GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

2º
Matemática

Segundo Grado. Primer Ciclo. Educación Secundaria

Libro abierto

SERIE 1

Versión digital

MATEMÁTICA
Segundo Grado. Primer Ciclo. Educación Secundaria

SERIE 1, PROYECTO LIBRO ABIERTO

Este libro ha sido diseñado y concebido por la **UNIDAD EDITORIAL** del **Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD)** dirigida por ***MANUEL NÚÑEZ ASENCIO.***

EQUIPO UNIDAD EDITORIAL

Asesoría pedagógica:	*Ancell Scheker Mendoza, Leonidas Germán, Carlos Geofrannys Vidal Pérez, María Virtudes Núñez Fidalgo*
Coordinadores de diagramación, corrección y cierre:	*Félix Gómez y Josephine Viloria*
Asesor editorial:	*Lony Fernández Álvarez*
Diseño gráfico y diagramación:	*Unidad Editorial MINERD*
Equipo de edición:	*Matemática (Aury Pérez)*
Corrección de textos y estilo:	*Equipo de revisores del MINERD y del ISFODOSU*
Ilustración / Fotografía:	*Grupo de ilustradores del MINERD y del ISFODOSU*
	Prexel, Unsplash, Freepik, Google maps, Wikipedia

TEXTOS Y CONTENIDOS

Coordinación general:	Esther Morales (Convenio Institucional)
Autores contenidos y textos:	Dra. Yolanda Serres, José Suero, MSc., Dr. Julio Mosquera. (Convenio Institucional)
Diseño gráfico y diagramación:	Carlos Rodríguez Almaguer
Ilustración / Fotografía:	Alan Escalona, Joselyn Salazar, Oriana Riveros, Venus Mata

Av. Máximo Gómez esquina Santiago, #2 Gazcue, Distrito Nacional, República Dominicana
809-688-9700 | info@minerd.gob.do | www.ministeriodeeducacion.gob.do

ISBN: 978-6645-646-44-3

Impreso por: Editora Corripio, S.A.S

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Convenio Institucional:

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

AUTORIDADES

Luis Abinader
Presidente de la República Dominicana

Raquel Peña
Vicepresidenta de la República Dominicana

Ángel Hernández Castillo
Ministro de Educación

Ancell Scheker Mendoza
Viceministra de Servicios Técnicos y Pedagógicos

Julio Cordero Espaillat
Viceministro de Gestión Administrativa

Ramón Rolando Reyes Luna
Viceministro de Planificación y Desarrollo Educativo

Oscar Amargós
Viceministro de Supervisión y Control de la Calidad Educativa

Ligia Jeanette Pérez Peña
Viceministra de Descentralización y Participación

Francisco Germán D´Oleo
Viceministro de Acreditación y Certificación

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Libro Abierto

Libro Abierto es la colección de textos escolares orientada a impactar en la calidad de la educación dominicana. Para la elaboración de los contenidos de estos libros participaron las academias científicas, las instituciones educativas y las universidades nacionales. En estos centros se concentran los principales intelectuales del país cuyos talentos han sido puestos al servicio de la educación nacional.

La colección Libro Abierto tendrá dos presentaciones. Una impresa, integrada por dos series, y la otra digital. En la primera, se publicarán aquellos textos que se orientan al segundo ciclo del Nivel Inicial, los primeros tres grados de primaria y las áreas curriculares de primaria y secundaria: Ciencias Sociales, Lengua Española, Matemática y Ciencias de la Naturaleza.

En la presentación digital se publicarán los libros de texto de todas las áreas y los materiales que sirvieron de base para la educación a distancia durante la pandemia. Para ello, se dispone de una plataforma desde la cual, los estudiantes y docentes, podrán descargar dichos materiales y hacer uso de ellos libremente. Fortalecemos así la educación bajo la modalidad híbrida, impresa y digital.

Con esta colección Libro Abierto se impactará positivamente en la calidad de la educación y, además, los recursos disponibles en el presupuesto del MINERD se utilizarán de una manera más eficiente.

Estos libros constituyen un referente cualitativo en la historia de la educación dominicana y esperamos que los directores de centros, los docentes, los estudiantes y sus padres sean los críticos permanentes de los mismos y que sus opiniones ayuden a mejorarlos constantemente.

Ángel Hernández Castillo

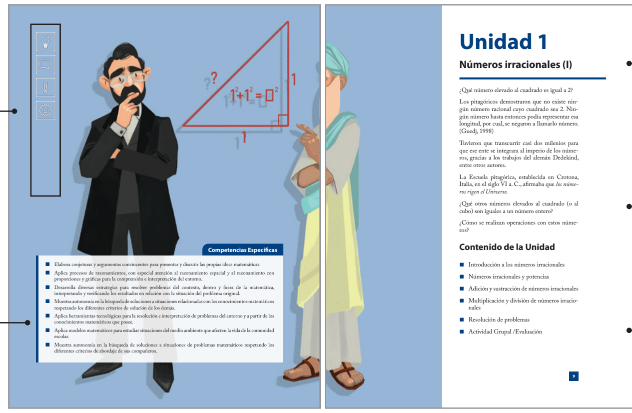
Ministro de Educación

¿CÓMO FUNCIONA TU LIBRO?

DOS PÁGINAS DE APERTURA DE UNIDAD

Iconos de Competencias fundamentales

Competencias Específicas claramente definidas



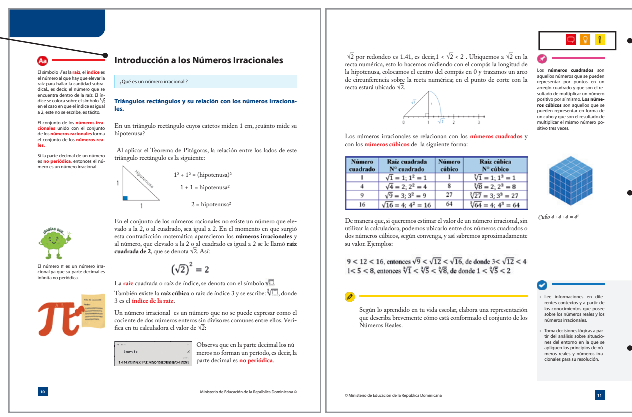
Identificador y título de la unidad didáctica

Situación de aprendizaje

Sumario de la Unidad

DIEZ PÁGINAS DE CONTENIDOS

Título de la doble página y pregunta didáctica



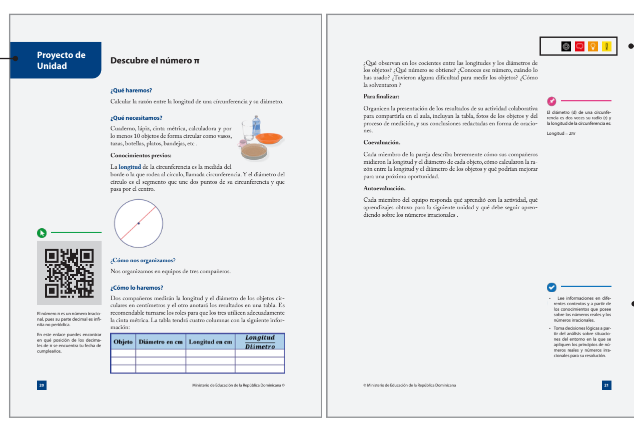
Iconos de Competencias Fundamentales aplicados a los contenidos

Columna de viñetas con contenidos variados

Indicadores de Logro

DOS PÁGINAS DE ACTIVIDAD GRUPAL

Título de la doble página

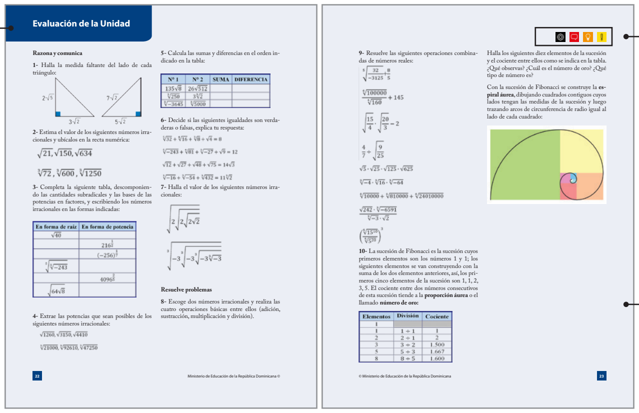


Iconos de Competencias Fundamentales

Los contenidos en las páginas de actividad grupal son variados: textos, actividades, ejercicios...

DOS PÁGINAS DE EVALUACIÓN

Título de la doble página



Iconos de Competencias Fundamentales

Se incluyen actividades diversas de **heteroevaluación y coevaluación.**

También incluye una **autoevaluación.**

Competencias Fundamentales

- Competencia Ética y Ciudadana
- Competencia Comunicativa
- Competencia de Pensamiento Lógico, Creativo y Crítico
- Competencia de Resolución de Problemas
- Competencia Científica y Tecnológica
- Competencia Ambiental y de la Salud
- Competencia de Desarrollo Personal y Espiritual

Viñetas de la Unidad

VOCABULARIO. Recurso de apoyo para conocer el significado de palabras poco comunes que enriquecen el vocabulario del estudiante.

EN LÍNEA. Viñeta opcional que motiva al estudiante a buscar informaciones virtuales a través de códigos QR y enlaces que le conectan con páginas web reconocidas.

MI PAÍS. Viñeta opcional para resaltar las instituciones públicas de nuestro país que trabajan con temas específicos.

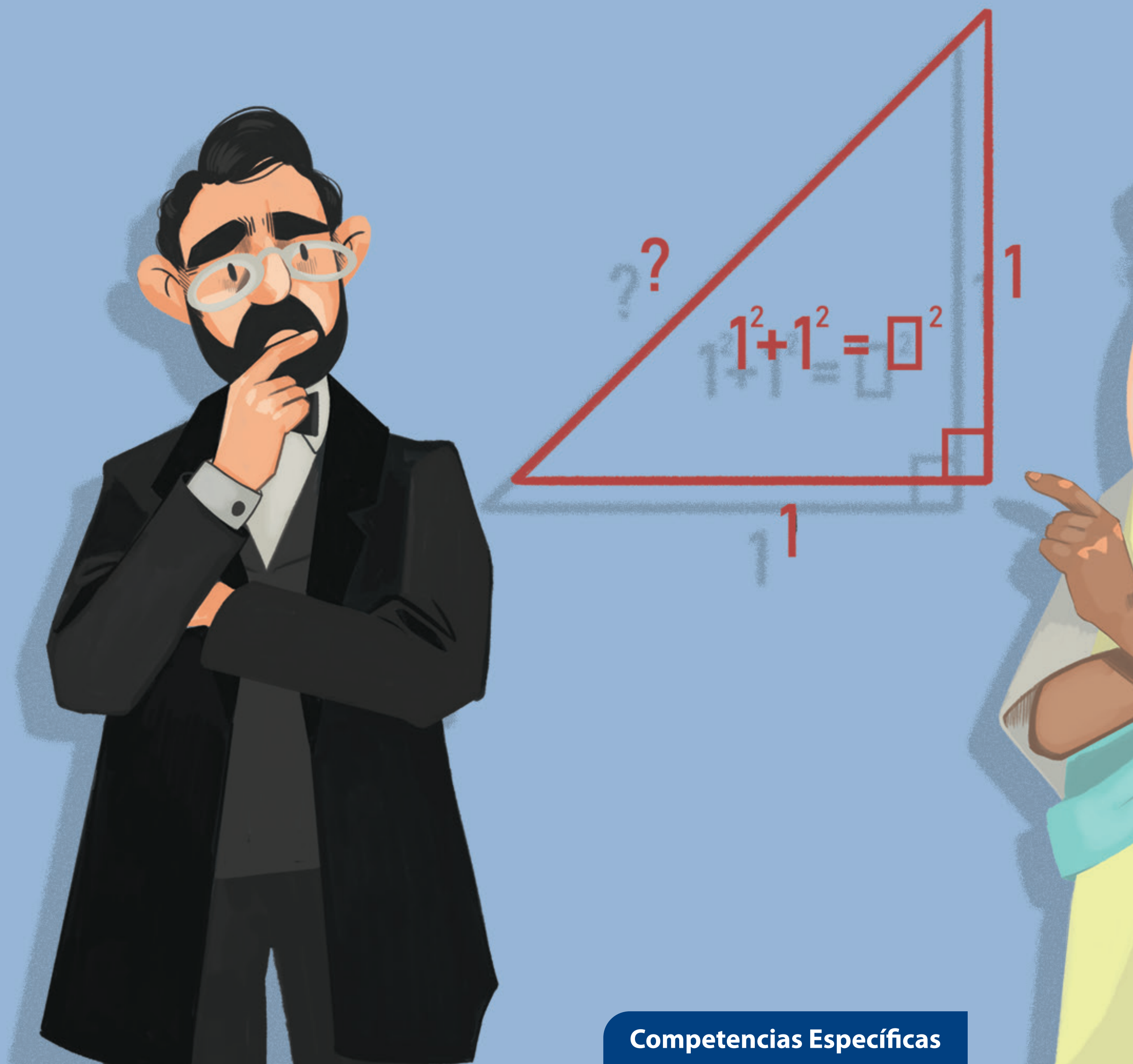
MI CULTURA. Viñeta opcional que pone de relieve los valores culturales dominicanos.

EN EL CUADERNO. Viñeta de uso obligatorio para indicar actividades y ejercicios.

INDICADORES DE LOGRO. Dirigida al docente para evaluar el avance de los estudiantes.

Consulta nuestra página web:
www.ministeriodeeducacion.gob.do

ÍNDICE DE CONTENIDOS



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 1

Números irracionales (I)

Situación de aprendizaje

¿Qué número elevado al cuadrado es igual a 2?

Los pitagóricos demostraron que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Ningún número hasta entonces podía representar esa longitud, por cual se negaron a llamarlo número. (Guedj, 1998).

Tuvieron que transcurrir casi dos milenios para que ese ente se integrara al imperio de los números, gracias a los trabajos del alemán Dedekind, entre otros autores.

La escuela pitagórica, establecida en Crotona, Italia, en el siglo VI a. C., afirmaba que *los números rigen el universo.*

¿Qué otros números elevados al cuadrado (o al cubo) son iguales a un número entero?

¿Cómo se realizan operaciones con estos números?

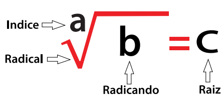
Contenido

- Introducción a los números irracionales
- Números irracionales y potencias
- Adición y sustracción de números irracionales
- Multiplicación y división de números irracionales
- Resolución de problemas
- Actividad grupal
- Evaluación

Introducción a los números irracionales

Aa

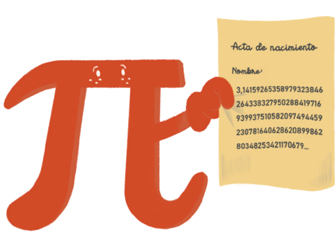
El símbolo $\sqrt{\ }$ es la **raíz**, el **índice** es el número al que hay que elevar la raíz para hallar la cantidad subradical, es decir, el número que se encuentra dentro de la raíz. El índice se coloca sobre el símbolo $\sqrt[2]{\ }$; en el caso en que el índice es igual a 2, este no se escribe, es tácito.



El conjunto de los **números irracionales** unido con el conjunto de los **números racionales** forma el conjunto de los **números reales.**

Si la parte decimal de un número es **no periódica e infinita**, entonces el número es un número irracional.

El número π es un número irracional ya que su parte decimal es infinita no periódica.

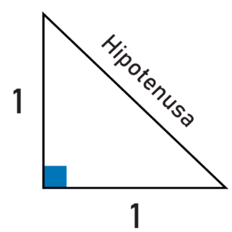


¿Qué es un número irracional ?

Triángulos rectángulos y su relación con los números irracionales.

En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 cm, ¿cuánto mide su hipotenusa?

Al **aplicar** el teorema de Pitágoras, la relación entre los lados de este triángulo rectángulo es la siguiente:



$$1^2 + 1^2 = (\text{hipotenusa})^2$$

$$1 + 1 = \text{hipotenusa}^2$$

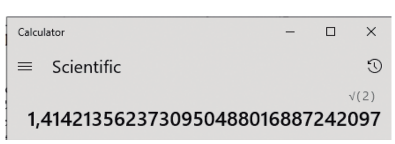
$$2 = \text{hipotenusa}^2$$

En el conjunto de los números racionales no existe un número que elevado a la 2, o al cuadrado, sea igual a 2. En el momento en que surgió esta contradicción matemática aparecieron los **números irracionales** y al número, que elevado a la 2 o al cuadrado es igual a 2 se le llamó **raíz cuadrada de 2**, que se denota $\sqrt{2}$. Así:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

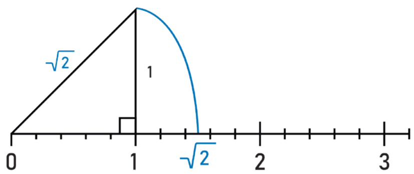
La **raíz** cuadrada o raíz de índice, se denota con el símbolo $\sqrt{\boxed{\ }}$.
También existe la **raíz cúbica** o raíz de índice 3 y se escribe: $\sqrt[3]{\boxed{\ }}$, donde 3 es el **índice de la raíz**.

Un número irracional es un número que no se puede **expresar** como el cociente de dos números enteros sin divisores comunes entre ellos. Verifica en tu calculadora el valor de $\sqrt{2}$:



Observa que en la parte decimal los números no forman un período, es decir, la parte decimal es **no periódica**.

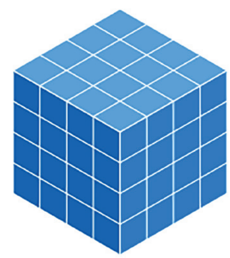
$\sqrt{2}$ por redondeo es 1.41, es decir, $1 < \sqrt{2} < 2$. Ubiquemos a $\sqrt{2}$ en la recta numérica, esto lo hacemos midiendo con el compás la longitud de la hipotenusa, colocamos el centro del compás en 0 y trazamos un arco de circunferencia sobre la recta numérica; en el punto de corte con la recta estará ubicado $\sqrt{2}$.



Los **números cuadrados** son aquellos números que se pueden representar por puntos en un arreglo cuadrado y que son el resultado de multiplicar un número positivo por sí mismo. **Los números cúbicos** son aquellos que se pueden representar en forma de un cubo y que son el resultado de multiplicar el mismo número positivo tres veces.

Los números irracionales se relacionan con los **números cuadrados** y con los **números cúbicos** de la siguiente forma:

Número cuadrado	Raíz cuadrada nro. cuadrado	Número cúbico	Raíz cúbica nro. cúbico
1	$\sqrt{1} = 1;\ 1^2 = 1$	1	$\sqrt[3]{1} = 1;\ 1^3 = 1$
4	$\sqrt{4} = 2;\ 2^2 = 4$	8	$\sqrt[3]{8} = 2;\ 2^3 = 8$
9	$\sqrt{9} = 3;\ 3^2 = 9$	27	$\sqrt[3]{27} = 3;\ 3^3 = 27$
16	$\sqrt{16} = 4;\ 4^2 = 16$	64	$\sqrt[3]{64} = 4;\ 4^3 = 64$



Cubo $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

De manera que, si queremos estimar el valor de un número irracional, sin utilizar la calculadora, podemos ubicarlo entre dos números cuadrados o dos números cúbicos, según convenga, y así sabremos aproximadamente su valor. Ejemplos:

$9 < 12 < 16$, entonces $\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$, de donde $3 < \sqrt{12} < 4$

$1 < 5 < 8$, entonces $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8}$, de donde $1 < \sqrt[3]{5} < 2$

- Según lo aprendido en tu vida escolar, **elabora** una representación que describa brevemente cómo está conformado el conjunto de los números reales.

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de números reales y números irracionales para su resolución.

Números irracionales y potencias

¿Cómo se relacionan los números irracionales con las potencias?

Relación entre un número irracional y las potencias

Hay números irracionales que pueden escribirse como una potencia cuya base es la cantidad subradical y cuyo exponente es una **fracción unitaria** de denominador igual al índice de la raíz. Ejemplos:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}}$$

Por esto, al elevar un número irracional a un exponente igual al índice de la raíz, es decir, aplicar la operación potenciación, obtenemos la cantidad subradical:

Número irracional	nro. irracional elevado al índice de√	Debido a que
$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$	$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$	$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$
$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5$	$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 5^1 = 5$
$\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}}$	$\left(\sqrt[4]{8}\right)^4 = \left(8^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 8$	$8^{\frac{1}{4}\cdot 4} = 8^1 = 8$

Algunas operaciones entre números irracionales son semejantes a las operaciones de las potencias:

Operación	Raíces de igual índice
Producto de números irracionales	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2.3} = \sqrt{6}$
Cociente de números irracionales	$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{7}}$
Raíz de una raíz	$\sqrt{\sqrt[5]{11}} = \sqrt[10]{11}$

Así $\sqrt[3]{8} = 2$, ya que:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$$

Y de igual forma:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \qquad \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \qquad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \qquad \sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$$

Aa

Una **fracción unitaria** es una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador es un entero positivo.

Un **número compuesto** es un número natural que no es primo, es decir, que tiene divisores distintos a 1 y a sí mismo.

Fuente: www.pressenza.com

En esta fotografía de la catedral de Santo Domingo, catedral primada de América, fundada en el siglo XVI, podemos construir un triángulo rectángulo de aproximadamente $\sqrt{2}$ de altura y de base aproximada $\sqrt{3}$. De manera que la hipotenusa del triángulo es $\sqrt{5}$.

Ya que $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5$.

Y el número que elevado al cuadrado es 5, es $\sqrt{5}$.

$2^3 = 8$, pues $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Si un número tiene **cantidad subradical negativa**, entonces:

Índice	Raíz	Ejemplo
Impar	Negativa	$\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6$
Par	**No es un número real**	$\sqrt[4]{-81}$ **no es un número real** Ya que $3^4 = 81 = (-3)^4$

Extracción de potencias de una raíz

Cuando la cantidad subradical de una raíz es un **número compuesto**, lo descomponemos en factores de potencias para poder extraerlas de la raíz, siempre y cuando su exponente sea igual o mayor al índice de la raíz. Ejemplos:

$$\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$$

$$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{15}$$

$$\sqrt[4]{336} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 7} = 2\sqrt[4]{21}$$

- **Complete** los espacios en blanco.

Raíz	Extracción de potencias de la raíz	Potencia
$\sqrt{120}$		$2(30)^{\frac{1}{2}}$
	$\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7}$	
$\sqrt[3]{1080}$		$6(5)^{\frac{1}{3}}$

Para potencias de igual exponente:

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = (6)^{\frac{1}{2}}$ Producto

$\frac{5^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ Cociente

$\left(11^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 11^{\frac{1}{10}}$ Potencia de una potencia

Si la potencia es de **base negativa** y de **exponente impar**, entonces la **potencia es NEGATIVA**.

Ej. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Si la potencia es de **base negativa** y de **exponente par**, entonces la **potencia es POSITIVA**.

Ej. $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de números reales y números irracionales para su resolución.

Adición y sustracción de números irracionales que se pueden expresar como raíces

Números irracionales son números reales que no pueden expresarse ni de manera exacta ni de manera periódica. En otras palabras, los números irracionales son números reales que no somos capaces de expresarlos en forma de fracción porque desconocemos tanto el numerador como el denominador.

¿Cómo sumamos y restamos números irracionales?

Adición de números irracionales que se pueden expresar como raíces

Para sumar dos números irracionales estos tienen que tener **la misma cantidad subradical y el mismo índice**. Ejemplo:

$$3\sqrt{5}+8\sqrt{5}=(3+8)\sqrt{5}=11\sqrt{5}$$

En la suma $3\sqrt{5}+8\sqrt{5}+\sqrt{20}$, primero hay que transformar $\sqrt{20}$ en un múltiplo de $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{\mathbf{20}}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 5}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}$$

Entonces: $\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}+\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{5}}+\sqrt{\mathbf{20}}=3\sqrt{5}+8\sqrt{5}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}$

$$3\sqrt{5}+8\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(3+8+2)\sqrt{5}=\mathbf{13}\sqrt{\mathbf{5}}$$

Sumar $\sqrt[3]{\mathbf{7}}+\mathbf{23}\sqrt[3]{\mathbf{7}}+\mathbf{16}\sqrt[3]{\mathbf{7}}=(1+23+16)\sqrt[3]{7}=\mathbf{40}\sqrt[3]{\mathbf{7}}$

Sumar $\mathbf{54}\sqrt[3]{\mathbf{7}}+\sqrt[3]{\mathbf{56}}+\sqrt[3]{\mathbf{7}}$. Transformar $\sqrt[3]{56}$ en un múltiplo de $\sqrt[3]{7}$:

$$54\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{\mathbf{56}}+\sqrt[3]{7}=54\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{\mathbf{2^3\cdot 7}}+\sqrt[3]{7}$$

$$=54\sqrt[3]{7}+\mathbf{2}\sqrt[3]{\mathbf{7}}+\sqrt[3]{7}=(54+2+1)\sqrt[3]{7}=\mathbf{57}\sqrt[3]{\mathbf{7}}$$

Sumar $9\sqrt{8}+6\sqrt{2}+15\sqrt{8}$. En este caso podemos proceder de dos formas, la primera es transformar $\sqrt{8}$ en un múltiplo de $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{9}\sqrt{\mathbf{8}}+\mathbf{6}\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{15}\sqrt{\mathbf{8}}&=9\sqrt{2^3}+6\sqrt{2}+15\sqrt{2^3}\\&=9\sqrt{2\cdot 2^2}+6\sqrt{2}+15\sqrt{2\cdot 2^2}\\&=9\cdot 2\sqrt{2}+6\sqrt{2}+15\cdot 2\sqrt{2}\\&=(18+6+30)\sqrt{2}=\mathbf{54}\sqrt{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

Para incluir un factor dentro de la raíz, se eleva el factor que se quiere incluir a un exponente igual al índice de la raíz y se multiplica por la cantidad subradical original.

O transformar $6\sqrt{2}$ en un múltiplo de $\sqrt{8}$. Para hacerlo hay que **incluir un factor dentro de la raíz**:

$$6\sqrt{2}=(3\cdot\mathbf{2})\sqrt{2}=3(2\sqrt{2})=3\sqrt{\mathbf{2^2}\cdot 2}=3\sqrt{2^3}=3\sqrt{8}$$

Ahora $\mathbf{9}\sqrt{\mathbf{8}}+\mathbf{6}\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{15}\sqrt{\mathbf{8}}=9\sqrt{8}+\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{8}}+15\sqrt{8}$

$$=(9+\mathbf{3}+15)\sqrt{8}=\mathbf{27}\sqrt{\mathbf{8}}$$

Verifica con la calculadora que $54\sqrt{2}=27\sqrt{8}$

Sustracción de números irracionales que se pueden expresar como raíces

Para restar dos números irracionales, igual que para la adición, estos tienen que tener la misma cantidad subradical y el mismo índice. Ejemplo:

$$8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (8-3)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (3-8)\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$$

Restar $13\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{45}$, primero hay que transformar $\sqrt{45}$ en un múltiplo de $\sqrt{5}$:

$$\boldsymbol{\sqrt{45}} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \boldsymbol{3\sqrt{5}}$$

Entonces:

$$13\sqrt{5} + \sqrt{5} - \boldsymbol{\sqrt{45}} = 13\sqrt{5} + \sqrt{5} - \boldsymbol{3\sqrt{5}} = (13+1-3)\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$$

Restar $\sqrt[3]{-4} - 9\sqrt[3]{-4} + 5\sqrt[3]{-4} = (1-9+5)\sqrt[3]{-4} = -3\sqrt[3]{-4}$

Restar $11\sqrt[3]{-4} - \sqrt[3]{-108} + 7\sqrt[3]{-4}$.

Transformar $\sqrt[3]{-108}$ en múltiplo de $\sqrt[3]{-4}$.

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{-108}} = \sqrt[3]{27 \cdot (-4)} = \sqrt[3]{3^3 \cdot (-4)} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{-4} = \boldsymbol{3\sqrt[3]{-4}}$$

$$11\sqrt[3]{-4} - \boldsymbol{\sqrt[3]{-108}} + 7\sqrt[3]{-4} = 11\sqrt[3]{-4} - \boldsymbol{3\sqrt[3]{-4}} + 7\sqrt[3]{-4}$$
$$= (11-3+7)\sqrt[3]{-4} = 15\sqrt[3]{-4}$$

- **Decide** si las siguientes igualdades son verdaderas(V) o falsas (F). **Justifica** cada respuesta.

$\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32} = 7\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{-192} + \sqrt[3]{-1536} = -4\sqrt[3]{3}$
$\sqrt{125} + \sqrt{25} + \sqrt{625} = 7\sqrt{5}$	$\sqrt{60} - \sqrt{135} + \sqrt{375} = 4\sqrt{15}$
$\sqrt[3]{-5} + \sqrt[3]{-135} - \sqrt[3]{-320} = 0$	$\sqrt[4]{112} + \sqrt[4]{567} - \sqrt[4]{4375} = 10\sqrt[4]{7}$

En la resta de números enteros 3-8, se resta y se coloca el signo del mayor valor absoluto que es 8, entonces la diferencia es negativa.

En la resta 1-9+5=-9+6, se resta y se coloca el signo del mayor valor absoluto que es 9, entonces la diferencia es negativa.

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de números reales y números irracionales para su resolución.

$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$ y $2^6 \cdot 2 = 2^7$

Este cambio se hizo para obtener un exponente 6 que pueda extraerse de una raíz con indice 6.

Al verificar con una calculadora científica puedes demostrar que $\sqrt{18} \cdot \sqrt[3]{12} = 6\sqrt[6]{18}$

En este video del canal Math at Home puedes observar cómo multiplicar raíces de distinto índice.

Multiplicación de números irracionales que se pueden expresar como raíces

¿Cómo multiplicamos y dividimos números irracionales?

Multiplicación de números irracionales que se pueden expresar como raíces

Para multiplicar dos números irracionales existen dos casos:

Caso 1. Raíces de igual índice

El producto de dos raíces de igual índice es una raíz del mismo índice y cuya cantidad subradical es el producto de la multiplicación de las cantidades subradicales de las raíces factores.

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{12}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 12}$$

$$\sqrt{18 \cdot 12} = \sqrt{216} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt{(2 \cdot 3)^3} = \sqrt{6^3} = \sqrt{6^2 \cdot 6} = 6\sqrt{6}$$

Caso 2. Raíces de distinto índice

El producto de dos raíces de distinto índice es una raíz cuyo índice es el mínimo común múltiplo (mcm) entre los índices de las raíces factores y cuya cantidad subradical es el producto de la multiplicación de las cantidades subradicales de las raíces factores elevadas al cociente entre el mcm y el índice original de cada una. Ejemplo:

$\sqrt{18} \cdot \sqrt[3]{12}$ — **mcm** (2,3) =6. $\frac{6}{2} = \mathbf{3}$ y $\frac{6}{3} = \mathbf{2}$

$\sqrt[6]{18^3 \cdot 12^2}$ — Se descomponen los números 18 y 12 en factores primos

$\sqrt[6]{(3^2 \cdot 2)^3 \cdot (2^2 \cdot 3)^2}$ — Se aplica potencia de una potencia

$\sqrt[6]{3^6 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 3^2}$ — Se extrae de la raíz las potencias de exponente igual a 6

$= \sqrt[6]{3^6 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 3^2}$

$(3 \cdot 2)\sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = 6\sqrt[6]{18}$ — Se multiplican los factores

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt[3]{12} = 6\sqrt[6]{18}$$

División de números irracionales que se pueden expresar como raíces

Al igual que en la multiplicación, en la división de números irracionales existen dos casos:

Caso 1. Raíces de igual índice

El cociente de dos raíces de igual índice es una raíz del mismo índice y cuya cantidad subradical es el cociente de la división de las cantidades subradicales de las raíces divididas.

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{18}{12}}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{18}{12}} = \sqrt{\frac{6\cdot 3}{6\cdot 2}} = \sqrt{\frac{6}{6}\cdot\frac{3}{2}} = \sqrt{1\cdot\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Caso 2. Raíces de distinto índice

El cociente de dos raíces de distinto índice es una raíz cuyo índice es el mínimo común múltiplo (mcm) entre los índices de las raíces divididas y cuya cantidad subradical es el cociente de la división entre las cantidades subradicales de las raíces divididas elevadas al cociente entre el mcm y el índice original de cada una. Ejemplo:

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{12}}$ **mcm** (2,3) =6. $\frac{6}{2} = \mathbf{3}$ y $\frac{6}{3} = \mathbf{2}$	$\sqrt[6]{\frac{(18)^3}{(12)^2}}$ Se descomponen los números 18 y 12 en factores primos
$\sqrt[6]{\frac{(3^2\cdot 2)^3}{(2^2\cdot 3)^2}}$ Se aplica potencia de una potencia	$\sqrt[6]{\frac{3^6\cdot 2^3}{2^4\cdot 3^2}} = \sqrt[6]{\frac{3^4}{2}} = \sqrt[6]{\frac{\mathbf{81}}{\mathbf{2}}}$ Se dividen las potencias
$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[6]{\frac{81}{2}}$	

- **Ejercita/ Utiliza** herramientas tecnológicas
  - **Realiza** las operaciones y simplifica. **Verifica** los resultados con la calculadora.

    a. $\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{4}}$ b. $\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{81}}$ c. $\sqrt[3]{48}\sqrt[5]{81} \div \sqrt{24}$

Halla el valor de:

$$\frac{\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}}}{\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}}$$

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4;\ \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2^{4-3}} = \frac{1}{2}$$

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en la que se apliquen los principios de números reales y números irracionales para su resolución.

Resolución de problemas con números irracionales

Cuando tenemos una multiplicación de factores iguales calculamos una potencia:

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

Cuando tenemos un número cuya descomposición factorial resulta una potencia, calculamos la raíz para obtener la base de la potencia:

$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.\ \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

¿Cómo resolvemos problemas con números irracionales?

Para resolver problemas con números irracionales que se pueden expresar como raíces hay que tener claro que la potenciación y la radicación son operaciones inversas.

Cálculo de la potencia 5^3	125 es una potencia Cálculo de su base
$5^3 = 125$	$125 = 5^3.\ \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

Por esa razón podemos extraer potencias de la raíz. Ejemplo:

$$\sqrt{24} \cdot \sqrt{90} = \sqrt{24 \cdot 90} = \sqrt{3{,}160} = \sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5}$$
$$= \sqrt{(2^2)^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{15} = (4 \cdot 3)\sqrt{15} = 12\sqrt{15}$$

Multiplica los números irracionales de cada fila con los de cada columna y extrae de la raíz las potencias que sea posible:

X	$\sqrt{45}$	$\sqrt[3]{3{,}888}$
$\sqrt{60}$		
$\sqrt[3]{2{,}025}$		

$$\sqrt{\mathbf{60}} \cdot \sqrt{\mathbf{45}} = \sqrt{60 \cdot 45} = \sqrt{2700} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2}$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = (\mathbf{2 \cdot 3 \cdot 5})\sqrt{3} = \mathbf{30\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{\mathbf{60}} \cdot \sqrt[3]{\mathbf{3{,}888}} = \sqrt[6]{(60)^3 \cdot (3{,}888)^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3 \cdot 5)^3(2^4 \cdot 3^5)^2}$$
$$= \sqrt[6]{2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^3} = \sqrt[6]{2^{14}} \cdot \sqrt[6]{3^{13}}.\ \sqrt[6]{5^3}$$
$$= 2^2\sqrt[6]{2^2} \cdot 3^2\sqrt[6]{3}.\ \sqrt[6]{5^3} = (\mathbf{4 \cdot 9})\sqrt[6]{4 \cdot 3 \cdot 125}$$
$$= \mathbf{36\ \sqrt[6]{1{,}500}}$$
$$\sqrt[3]{\mathbf{2{,}025}} \cdot \sqrt{\mathbf{45}} = \sqrt[6]{(2{,}025)^2 \cdot (45)^3} = \sqrt[6]{(3^4 \cdot 5^2)^2 \cdot (3^2 \cdot 5)^3}$$
$$= \sqrt[6]{3^{14} \cdot 5^7} = (\mathbf{3^2 \cdot 5})\sqrt[6]{\mathbf{3^2 \cdot 5}} = \mathbf{45\sqrt[6]{45}}$$

En este video del canal Tutorialesde Mate podrás observar cómo usar una calculadora científica para hallar la aproximación de un número irracional.

https://www.youtube.com/watch?v=44twz7YqU_A

Efectúa las operaciones con números irracionales:

X	$\sqrt{45}$	$\sqrt[3]{3{,}888}$
$\sqrt{60}$	$30\sqrt{3}$	$18\sqrt[6]{6{,}000}$
$\sqrt[3]{2{,}025}$	$15\sqrt[6]{405}$	$54\sqrt[3]{50}$

$$\sqrt{\sqrt[4]{\mathbf{13{,}122}}} = \sqrt[8]{13{,}122} = \sqrt[8]{2\cdot 3^8} = \sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{3^8} = (\sqrt[8]{2})3 = \mathbf{3\sqrt[8]{2}}$$

$$\sqrt[3]{\mathbf{2^2\sqrt[5]{-192}}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{10}\cdot\left(2^6\cdot(-3)\right)}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{(2^{10}\cdot 2^6)\cdot(-3)}}$$

$$= \sqrt[15]{2^{16}\cdot(-3)} = 2\sqrt[15]{2\cdot(-3)} = \mathbf{2\sqrt[15]{-6}}$$

$$\sqrt{\mathbf{3125}} - \frac{\sqrt{\mathbf{100}}}{\sqrt{\mathbf{20}}} = \sqrt{5^5} - \sqrt{\frac{100}{20}} = 5^2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \mathbf{4\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{\mathbf{-235{,}298}}}{\sqrt[5]{\mathbf{-2}}} + \frac{\sqrt[5]{\mathbf{-1{,}120}}}{\sqrt[5]{\mathbf{5}}} = \sqrt[5]{\frac{-235{,}298}{-2}} + \sqrt[5]{\frac{-1{,}120}{5}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{7^6\cdot(-2)}{(-2)}} + \sqrt[5]{\frac{(-2)^5\cdot 5\cdot 7}{5}} = \sqrt[5]{7^6} + \sqrt[5]{(-2)^5\cdot 7}$$

$$= 7\sqrt[5]{7} - 2\sqrt[5]{7} = \mathbf{5\sqrt[5]{7}}$$

- **Divide** los números irracionales de cada fila entre los de cada columna y extrae de la raíz las potencias que sea posible:

$\div$	$\sqrt{45}$	$\sqrt[3]{3888}$
$\sqrt{60}$		
$\sqrt[3]{2025}$		

Escribe la siguiente potencia en forma de raíz:

$$\left(\left(\left(13^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$2^{10}\cdot 2^6 = 2^{10+6} = 2^{16}$

Multiplicación de potencias de igual base.

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de números reales y números irracionales para su resolución.

Actividad grupal

Descubre el número π

¿Qué haremos?

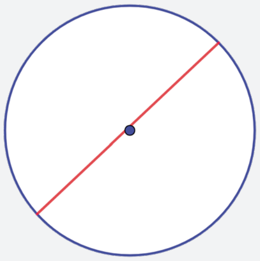
Calcular la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

¿Qué necesitamos?

Cuaderno, lápiz, cinta métrica, calculadora y por lo menos 10 objetos de forma circular como vasos, tazas, botellas, platos, bandejas, etc .

Conocimientos previos:

La **longitud** de la circunferencia es la medida del borde o la que rodea al círculo, llamada circunferencia. Y el diámetro del círculo es el segmento que une dos puntos de su circunferencia y que pasa por el centro.



El número π es un número irracional, pues su parte decimal es infinita no periódica.

En este enlace puedes encontrar en qué posición de los decimales de π se encuentra tu fecha de cumpleaños.

https://mypiday.com/

¿Cómo nos organizamos?

Nos organizamos en equipos de tres compañeros.

¿Cómo lo haremos?

Dos compañeros medirán la longitud y el diámetro de los objetos circulares en centímetros y el otro anotará los resultados en una tabla. Es recomendable turnarse los roles para que los tres utilicen adecuadamente la cinta métrica. La tabla tendrá cuatro columnas con la siguiente información:

Objeto	Diámetro en cm	Longitud en cm	$\frac{Longitud}{Diámetro}$

¿Qué observan en los cocientes entre las longitudes y los diámetros de los objetos? ¿Qué número se obtiene? ¿Conoces ese número?, ¿Cuándo lo has usado? ¿Tuvieron alguna dificultad para medir los objetos? ¿Cómo la solventaron ?

El diámetro (d) de una circunferencia es dos veces su radio (r) y la longitud de la círcunferencia es:

Longitud = $2\pi r$

Para finalizar:

Organicen la presentación de los resultados de su actividad colaborativa para compartirla en el aula, incluyan la tabla, fotos de los objetos y del proceso de medición y sus conclusiones redactadas en forma de oraciones.

Coevaluación

Cada miembro de la pareja **describa** brevemente cómo sus compañeros midieron la longitud y el diámetro de cada objeto, cómo calcularon la razón entre la longitud y el diámetro de los objetos y qué podrían mejorar para una próxima oportunidad.

Autoevaluación

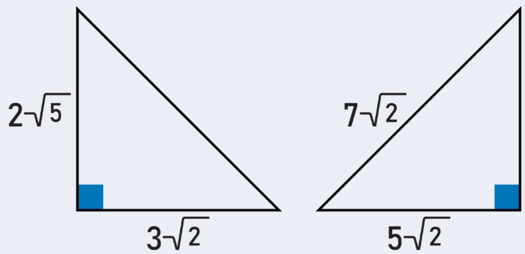
Cada miembro del equipo **responda** qué aprendió con la actividad, qué aprendizajes obtuvo para la siguiente unidad y qué debe seguir aprendiendo sobre los números irracionales .

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
•	El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
•	He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…
•	Un tema de esta unidad sobre el que me gustaría estudiar o investigar más a fondo es...

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en la que se apliquen los principios de números reales y números irracionales para su resolución.

Evaluación

- **Halla** la medida faltante del lado de cada triángulo:



- **Estima** el valor de los siguientes números irracionales y ubícalos en la recta numérica:

$$\sqrt{21}, \sqrt{150}, \sqrt{634}$$

$$\sqrt[3]{72}\,,\ \sqrt[3]{600}\,,\ \sqrt[3]{1250}$$

- **Completa** la siguiente tabla, descomponiendo las cantidades subradicales y las bases de las potencias en factores, y escribiendo los números irracionales en las formas indicadas:

En forma de raíz	En forma de potencia
$\sqrt{40}$	
	$216^{\frac{1}{2}}$
	$(-256)^{\frac{1}{7}}$
$\sqrt[5]{\sqrt[3]{-243}}$	
	$4096^{\frac{2}{5}}$
$\sqrt{64\sqrt{8}}$	

- **Extrae** las potencias que sean posibles de los siguientes números irracionales:

$\sqrt{1260}, \sqrt{3150}, \sqrt{4410}$

$\sqrt[3]{21000}, \sqrt[3]{92610}, \sqrt[3]{47250}$

- **Calcula** las sumas y diferencias en el orden indicado en la tabla:

N° 1	N° 2	SUMA	DIFERENCIA
$135\sqrt{8}$	$26\sqrt{512}$		
$\sqrt[3]{250}$	$3\sqrt[3]{2}$		
$\sqrt[3]{-3645}$	$\sqrt[3]{5000}$		

- **Decide** si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, explica tu respuesta:

$\sqrt[5]{32} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{8} + \sqrt{4} = 8$

$\sqrt[5]{-243} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt{9} = 12$

$\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75} = 14\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{432} = 11\sqrt[3]{2}$

- **Halla** el valor de los siguientes números irracionales:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

$$\sqrt[3]{-3\sqrt[3]{-3\sqrt[3]{-3\sqrt[3]{-3}}}}$$

- **Escoge** dos números irracionales y realiza las cuatro operaciones básicas entre ellos (adición, sustracción, multiplicación y división).

- **Resuelve** las siguientes operaciones combinadas de números reales:

$$\sqrt[5]{\frac{32}{-3125}+\frac{8}{5}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{100000}}{\sqrt[4]{160}}+145$$

$$\sqrt{\frac{15}{4}}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}}-2$$

$$\frac{4}{7}\div\sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{125}\cdot\sqrt{625}$$

$$\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{-64}$$

$$\sqrt[4]{10000}+\sqrt[4]{810000}+\sqrt[4]{24010000}$$

$$\frac{\sqrt{242}\cdot\sqrt[3]{-6591}}{\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt{2}}$$

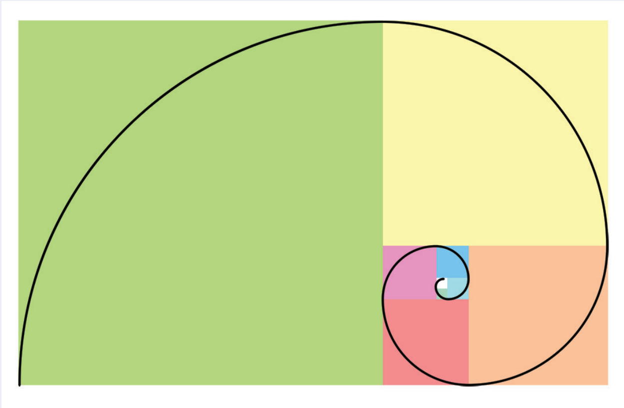
$$\left(\frac{\sqrt[5]{15^{10}}}{\sqrt[5]{5^{20}}}\right)^3$$

- La sucesión de Fibonacci es la sucesión cuyos primeros elementos son los números 1 y 1; los siguientes elementos se van construyendo con la suma de los dos elementos anteriores, así, los primeros cinco elementos de la sucesión son 1, 1, 2, 3, 5. El cociente entre dos números consecutivos de esta sucesión tiende a la **proporción áurea** o el llamado **número de oro:**

Elementos	División	Cociente
1		
1	$1 \div 1$	1
2	$2 \div 1$	2
3	$3 \div 2$	1.500
5	$5 \div 3$	≈1.667
8	$8 \div 5$	1.600

- **Halla** los siguientes diez elementos de la sucesión y el cociente entre ellos como se indica en la tabla. ¿Qué observas? ¿Cuál es el número de oro? ¿Qué tipo de número es?

Con la sucesión de Fibonacci se construye la **espiral áurea**, dibujando cuadrados contiguos cuyos lados tengan las medidas de la sucesión y luego trazando arcos de circunferencia de radio igual al lado de cada cuadrado:



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 2

El conjunto de los números reales

Situación de aprendizaje

La noción de número ha desempeñado un papel importante en la historia de la humanidad, y ha traído grandes avances tecnológicos a todas las civilizaciones. Cada uno de los conjuntos numéricos surgieron de diversas necesidades y evolucionaron hasta los que conocemos hoy.

En la actualidad los utilizamos continuamente de manera inconsciente, al momento de realizar cálculos en diversos escenarios tales como ir de compras, llevar las cuentas de los bancos, hacer medidas de longitudes, entre otros.

¿Puedes identificar algunos escenarios donde se usa los números reales?, ¿cuáles propiedades cumplen estos números?, ¿cómo podemos operar con ellos?

Contenido

- Números reales ($\mathbb{R}$)
- Números reales en la historia
- Propiedades de $\mathbb{R}$
- Adición y sustracción en $\mathbb{R}$
- Multiplicación y división en $\mathbb{R}$
- Actividad grupal
- Evaluación

Números reales $(\mathbb{R})$

Conjunto de números reales: es aquel que está conformado por todas las expresiones decimales periódicas y no periódicas.

¿A qué conjunto numérico pertenece el número $\sqrt{16}$?

Conjuntos numéricos

Existen diversos conjuntos numéricos, veamos aquellos asociados al de los números reales.

Conjunto de números naturales: es aquel que se indica utilizando el símbolo $\mathbb{N}$. Está conformado por todos los números que nos permiten determinar la cantidad de elementos que tiene un conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

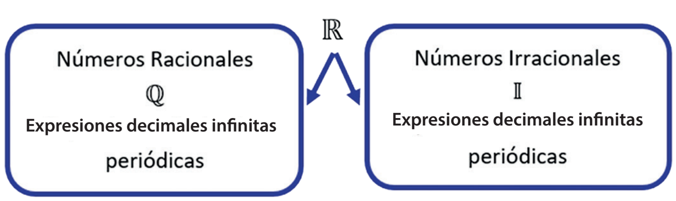
Conjunto de números enteros: es aquel que se denota utilizando el símbolo $\mathbb{Z}$. Está conformado por todas las cantidades enteras positivas, negativas y el cero. Este grupo se caracteriza porque todos los números tienen su opuesto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Conjunto de números racionales: es aquel que está conformado por cocientes de números enteros, en donde el denominador sea distinto de cero. Se denota utilizando el símbolo $\mathbb{Q}$ y dada la relación con las cifras decimales, se puede decir que este conjunto es aquel que está formado por todas las expresiones decimales periódicas y los números enteros.

Conjunto de números irracionales: es aquel que está conformado por todos los números que tienen **expresiones decimales infinitas no periódicas**. Se denota utilizando el símbolo $\mathbb{I}$. Estos números no pueden ser expresados como cociente de dos cifras enteras.

La unión de todos estos conjuntos numéricos se denomina **conjunto de números reales,** que se indica utilizando el símbolo $\mathbb{R}$.



¿Cuál es el opuesto del cero?

El opuesto de un número entero está asociado a aquellos números que, al sumar, el resultado es igual a cero. Así, el opuesto de 3 es -3, dado que 3+(-3)=0.

Aquí podrás reforzar los conocimientos sobre las expresiones decimales periódicas.

Relaciones de pertenencia y de inclusión

Cuando se trabaja con conjuntos, se puede **definir** la relación de pertenencia de un elemento al mismo, o la relación de inclusión entre ellos. En el caso del conjunto de números reales, se tienen las siguientes relaciones de inclusión:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Adicionalmente, se tienen que no existe ningún elemento común entre los conjuntos de los números racionales e irracionales; aún más, decimos que son conjuntos disjuntos y que su unión forma los números reales.

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

La relación de pertenencia se da, cuando un elemento está en un conjunto. Para denotarlo utilizamos el símbolo $\in$.

Por ejemplo,
$0 \in \mathbb{N}$ $-1 \in \mathbb{Z}$; $½ \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

La relación de inclusión se da cuando todos los elementos de un conjunto están en otro. Para denotar esta relación utilizamos el símbolo $\subset$.

- Completa la tabla ubicada a tu derecha, utilizando los símbo los $\in$ y $\notin$, en los espacios correspondientes.

Números	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-3					
$\frac{1}{4}$					
3					
$\sqrt{2}$					

Lee, cada una de los planteamientos, e **indica** el conjunto numérico que se ha utilizado para dar solución.

Situación	Conjunto numérico
El ONAMET reconoció que, el 8 de febrero de 1958, se registró en Constanza una temperatura de $-1°C$.	
En el teleférico de Puerto Plata se necesita reforzar uno de los cables, para ello han aplicado el *Teorema de Pitágoras*, a fin de determinar la longitud.	
En una parcela, ubicada en el valle de San Juan, $1/3$ del terreno se sembró de habichuelas y en el resto arroz.	

Fuente: https://www.visitarepublicadominicana.org/teleferico-puerto-plata

El teleférico de Puerto Plata es una de las paradas turísticas más importantes de República Dominicana. Funciona desde 1975 y con un viaje de 10 minutos, aproximadamente, los turistas pueden disfrutar de una vista muy especial de la ciudad, debido a la hermosa combinación que ofrece el paisaje, con las verdes llanuras y el mar.

- Lee informaciones, en diferentes contextos, a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los irracionales, interpreta situaciones de la comunidad, empleando en su lenguaje dicho conjunto de números.

Aa

Sistema de numeración: es un conjunto finito de signos y reglas, que nos permiten expresar cualquier cantidad, siguiendo las pautas establecidas.

Poco se conoce sobre la biografía de quien es considerado como el matemático más famoso de la antigüedad. Se cree que Euclides fue educado en Atenas. En Alejandría fundó una escuela que se convertiría en la más importante de la región.

Fuente: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm

La civilización egipcia siempre ha causado un gran interés, lo que ha permitido la publicación de libros, películas y juegos con elementos de su cultura. En este enlace podrás encontrar más información de interés sobre ella.

https://egiptologia.org/

Números reales en la historia

> ¿Cómo se representaban los números reales y quienes contribuyeron a su formación?

Egipto y Mesopotamia

Se tienen registros de que, alrededor del 2700 a.C., los egipcios fueron una de las primeras civilizaciones que crearon un **sistema de numeración**, donde se utilizaban siete símbolos para representar los números enteros positivos. Este sistema se caracterizaba por ser no posicional de base 10, dado que el orden de cómo se presentaban los símbolos no importaba y los mismos tenían un valor de potencias de 10.

Utilizaban el **Ojo de Horus** para representar algunos números racionales positivos, cuyo denominador era potencia de dos. Se han encontrado algunos documentos como el *Papiro de Moscú* y el de *Rhind*, donde se evidencia el abordaje de distintos problemas, presentando fórmulas para el cálculo de área. También, se muestran algoritmos para la multiplicación, división y el trabajo con fracciones.

En el caso de la cultura babilónica, ubicada en la región de Mesopotamia, construyeron un sistema de numeración a partir del uso de **cuña**s. Tenían un **sistema posicional base 60**, lo cual significa que dependiendo de donde se encontraban, el símbolo tenía un valor y realizaban agrupaciones de 60 en 60. Se han encontrado muchas tablillas de barro cocido, donde se presenta el uso de los números en diversos contextos.

Euclides y los elementos

Euclides nació alrededor del año 325 a.C., en Alejandría, Egipto. Fue uno de los más prominentes matemáticos de la Edad Antigua. Su obra más famosa estaba constituida por 13 libros y se llamaba *Los elementos.* Los tomos séptimo, octavo y noveno estaban orientados al estudio de los números enteros, específicamente en tópicos asociados a la *teoría de números*, mientras que en el décimo aborda los irracionales.

Números irracionales especiales

En el conjunto de los números irracionales se pueden encontrar dos números especiales, que no se escriben utilizando radicales. Estos se conocen como transcendentales y han sido de interés por sus aplicaciones.

El número π es la constante que resulta al dividir la longitud de la circunferencia entre su diámetro; su valor aproximado es **3.14**. Civilizaciones como la de los egipcios, babilonios, judíos, indios, griegos y chinos estudiaron este número, presentando valores aproximados.

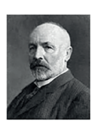
Por otra parte, el número de Euler o «*e*», es relativamente reciente, siendo su valor, aproximado, de **2.72.** Se utiliza en el campo de la probabilidad y la estadística. Una manera de representarlo es:

$$\boldsymbol{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

En este video podrás profundizar tus conocimientos sobre el número *e*. Se presenta el contexto de cómo surgió y su relación con el campo de las finanzas.

https://www.youtube.com/watch?v=Grm1DXPV9is

Personajes que hicieron aportes a los números reales

Leonardo Filius Bonacci (1170-1240)		Hizo popular el sistema de numeración posicional decimal, utilizado en las civilizaciones indo-arábigas
Leonhard Euler (1707-1783)		Desarrolló investigaciones asociadas a los números reales e hizo aportes al estudio de los números enteros.
Julius Richard Dedekind (1831-1916)		Presentó la definición formal del conjunto de los números reales, a partir de los racionales.
Georg Cantor (1845-1918).		Estudió el concepto de infinito; llegó a demostrar que los conjuntos infinitos no necesariamente tienen el mismo tamaño.

En este video podrás reforzar tus conocimientos sobre el número π. De igual manera, puedes observar cómo ha sido la evolución en el cálculo de los decimales de este número, hasta la actualidad.

https://www.youtube.com/watch?v=i1hqciMGofo

- ¿Qué otro matemático ha realizado aportes asociados a los números reales? ¿Cuál fue el aporte? **Presenta** un ejemplo.

- Lee informaciones, en diferentes contextos, a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.

Propiedades de ℝ

¿Cuáles propiedades cumple el conjunto de los números reales?

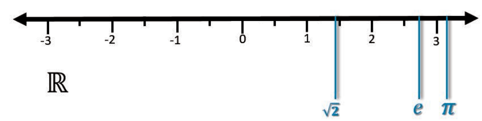
¿Cuál es el número más grande que conoces?

En este video, encuentras respuesta a esta pregunta. También, te ofrece información sobre cómo puedes encontrar números grandes.

https://acortar.link/w8Vl2M

Números reales y la recta numérica

Existe una correspondencia entre el conjunto de los números reales y la recta numérica, lo que permite asignarle a cada punto de la recta un número real y viceversa. Además, se puede decir que en dicha recta se encuentran todos los números reales.



Dado que en la recta numérica se tienen puntos, se puede comparar la distancia entre dos tantos cualesquiera. En el caso de calcular la distancia entre un número real y el cero, se dice que en este se está calculando el **valor absoluto del número**.

El valor absoluto de un número real siempre será cero o un número positivo. Se utilizan las dos barras para representarlo.

Así pues, si se tiene que:

El valor absoluto de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{3}$, pues es la medida de la longitud del segmento formado del 0 al $\frac{1}{3}$. $\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$

El valor absoluto de $-\sqrt{3}$ es $\sqrt{3}$, pues es la medida de la longitud del segmento formado del 0 al $-\sqrt{3}$. $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

Se cree que el matemático **John Wallis** (1616-1703), fue el creador e impulsador del uso de la recta numérica. En este enlace podrás encontrar más información sobre este importante matemático.

https://acortar.link/M3XvGa

Orden en el conjunto de los números reales

El conjunto de los números reales es ordenado; esto significa que siempre se pueden comparar entre sí, es decir, se puede establecer si un número real es mayor, menor o igual que otro.

En la recta numérica, un número va a ser mayor que otro si se encuentra más a la derecha. Ejemplos:

- Un número negativo siempre será menor que un número positivo.
- Un número positivo siempre será mayor que un número negativo.
- Un número negativo será mayor a otro número negativo, si su valor absoluto es menor, es decir, si está más cerca del cero.

Adición en $\mathbb{R}$	
Propiedades	**Ejemplos**
Conmutativa: no importa el orden cómo se presenten los sumandos, esto no alterará la suma.	$7 + (-5) = (-5) + 7$ $2 = 2$
Asociativa: no importa la manera de agrupar los sumandos, la suma siempre será la misma.	$3 + (2 + 5) = (3 + 2) + 5$ $3 + 7 = 5 + 5$ $10 = 10$
Elemento neutro: al sumar un número real con el cero, la suma será la misma.	$\pi + 0 = \pi$
Elementos opuestos: cada número real tiene un elemento que, cuando lo sumas, el resultado es 0.	$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Multiplicación en $\mathbb{R}$	
Propiedades	**Ejemplos**
Conmutativa: no importa el orden de los factores, esto no alterará el producto.	$(-2) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-2)$ $6 = 6$
Asociativa: no importa la manera de agrupar los factores, el producto siempre será el mismo.	$5 \cdot (4 \cdot 7) = (5 \cdot 4) \cdot 7$ $5 \cdot 28 = 20 \cdot 7$ $140 = 140$
Elemento identidad: al multiplicar un número real por el uno, el producto será el mismo.	$\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$
Elementos inversos: para cada número real distinto de cero, existe un elemento inverso, que al multiplicarlo el resultado es 1.	$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$
Elemento absorbente: todo número multiplicado por cero es igual a cero.	$0 \cdot \sqrt{3} = 0$

Propiedad distributiva: esta propiedad permite relacionar las dos operaciones en el conjunto de los números reales.

- **Identifica** qué propiedad de adición o multiplicación de números reales se ha aplicado en cada caso y proporciona por lo menos tres ejemplos donde se apliquen otras propiedades que aquí no se han aplicado.

  • $\sqrt{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sqrt{2}$ b. $\sqrt{2}\,(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2})$

  • $e + 0 = e$

¿Puedes presentar un ejemplo de la aplicación de la propiedad distributiva?

El valor absoluto de un número real puede ser expresado utilizando potencias y radicales. Así podemos escribir

$|-5| = \sqrt{(-5)^2} = ((-5)^2)^{\frac{1}{2}}$

En estos casos no se puede intercambiar los exponentes.

- Lee informaciones, en diferentes contextos, a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales.

Adición y sustracción en $\mathbb{R}$

Los radicales semejantes son aquellos que tienen la misma cantidad subradical y el mismo índice luego de realizar el proceso de reducción de radicales.
En el caso de que los números reales sean transcendentales, de igual manera se agruparán aquellos semejantes.

Para efectuar la adición de números reales, se deben considerar los signos:

- Si tienen igual signo, se calcula la suma de sus valores absolutos y el resultado tendrá el signo común.
- Si tienen diferentes signos, se calcula la diferencia de los valores absoluto y el resultado tendrá el signo del mayor valor absoluto.

De igual manera, se deben tener en cuenta los denominadores:

- Si tienen igual denominador, la suma será un número real cuyo numerador es la suma de los numeradores y el denominador será el mismo.
- Si tienen diferentes denominadores, se deben amplificar los cocientes para obtener dos números real de igual denominador.

La amplificación de un cociente se obtiene al multiplicar numerador y denominador por un mismo número.

Al amplificar el cociente $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ por 5 obtenemos $-\frac{20\sqrt{3}}{15}$
Al amplificar el cociente $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ por 3 obtenemos $-\frac{6\sqrt{3}}{15}$

¿Cómo podemos obtener la suma o resta de números reales?

Algoritmos de la adición y sustracción en $\mathbb{R}$

Para **calcular** la adición con números reales, es necesario agrupar radicales semejantes . Para esto, podemos aglomerar números reales haciendo uso de la propiedad conmutativa y asociativa.

Ejemplos:

- Efectúa las siguientes operaciones con números reales:

$$-\frac{1}{3}+\frac{7\sqrt{5}}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{3}$$

Agrupamos $=\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{7\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

Efectuamos las operaciones $=\frac{4}{3}+\frac{8\sqrt{5}}{2}-\frac{26\sqrt{3}}{15}$

- José tiene un colmado y en la caja tiene RD\$30,000 en efectivo, gasta RD\$4,500 comprando víveres y RD\$20,000 en productos de la canasta básica. Luego saca de su cuenta corriente RD\$60,000 y compra artículos escolares por un valor de RD\$25,000. ¿Cuánto efectivo tiene José?

Solución: Dado que José tenía originalmente RD\$30,000 en efectivo e hizo dos compras, el resultado en esta primera transacción es:

RD\$30,000 - RD\$4,500 - RD\$20,000 = RD\$6,500

Luego, al sumar lo que retiró de la cuenta corriente se tiene que el efectivo sería:

RD\$6,500 + RD\$60,000 = RD\$66,500

Finalmente, al descontar lo que invirtió en artículos escolares, tendríamos que el efectivo que maneja José es:

RD\$66,500 - RD\$25,000 = RD\$41,500

- En un día de trabajo, una pastelería ha producido 210 pasteles, de los cuales $\frac{4}{7}$ son de coco; $\frac{1}{3}$ de la producción están rellenos de frutas y el resto son para diabéticos. ¿Cuántos pasteles para diabéticos produjo la pastelería?

Solución: Dado que se sabe que $\frac{4}{7}$ son de coco y $\frac{1}{3}$ son con relleno de frutas, se tiene que la suma de los que no son para diabéticos es:

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{3}=\frac{12}{21}+\frac{7}{21}=\frac{12+7}{21}=\frac{19}{21}$$

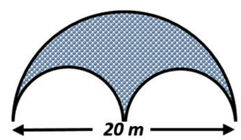
Luego, $\frac{19}{21}$ del total producido que no son para diabéticos. Luego, la porción de pasteles que son para diabéticos es:

$$1-\frac{19}{21}=\frac{21}{21}-\frac{19}{21}=\frac{21-19}{21}=\frac{2}{21}$$

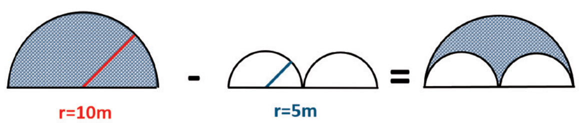
Finalmente, la cantidad de pasteles que son para diabéticos viene dada por $\frac{2}{21}(210) = 20$, es decir, se producen 20 pasteles para diabéticos.

$$\begin{aligned}1+1 &= 1+1^{(1/2)}\\ &= 1+((-1)(-1))^{(1/2)}\\ &= 1+((-1)^2)^{(1/2)}\\ &= 1+(-1)^{(2/2)}\\ &= 1+(-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

En un nuevo resort de Punta Cana, desean construir una piscina infantil a partir de semicircunferencias como muestra la figura de la derecha. ¿Cuál es el área de que abarcará la piscina?



Solución: Dado que la forma de la piscina es irregular, debemos llevar el problema a formas conocidas.



En particular, se puede visualizar que el área de la piscina está conformada por un semicírculo cuyo radio es **10m** y a este se le ha restado el área de dos semicírculos de radio **5m** cada uno. Luego el área de la piscina será

$$\frac{(\pi(10m)^2)_3}{2}-\frac{(2\pi(5^2)}{2}=\frac{(100\pi m^2)}{2}-\frac{(50\pi m^2)}{2}=\frac{(50\pi m^2)}{2}=25\pi m^2$$

Así, el área que abarcará la piscina es $25\pi m^2$.

- **Efectúa** las siguientes operaciones con números reales:
  - $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{4}}{3}\Big)+\Big(\frac{\sqrt{4}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)=$
  - $\frac{5\sqrt{45}}{7}+\frac{2}{5}+\frac{7\sqrt{20}}{5}-\frac{3}{7}=$

- Lee informaciones, en diferentes contextos, y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los números irracionales, resuelve un problema del contexto, en el que se apliquen los conocimientos de los números reales.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas, para interpretar soluciones de situaciones diversas, a partir de los conocimientos sobre números reales.

Multiplicación y división en $\mathbb{R}$

Para efectuar la multiplicación de números reales, se deben considerar los signos:

- Si tienen igual signo, se calcula el producto de los valores absolutos y el resultado será positivo.
- Si tienen diferentes signos, se calcula el producto de los valores absolutos y el resultado será negativo.

Dado que el símbolo habitual de la multiplicación (×) podía causar confusión en los escritos matemáticos, Gottfried W. Leibniz, en 1698, señalaba que prefería el uso del punto (·), para denotar esta operación. Por esa razón, en la actualidad, es el símbolo más usado para indicar la multiplicación.

El uso de los algoritmos de la multiplicación de números reales está asociado al desarrollo de la habilidad numérica. En el enlace encontrarás una actividad que te permitirá reforzar esta habilidad.

https://www.thatquiz.org/tq-1/?-j10k-la-nk-p0

¿Cómo podemos obtener el producto o cociente de números reales?

Algoritmos de la multiplicación e n $\mathbb{R}$.

Para calcular la multiplicación con números reales, se deben tomar en cuenta las propiedades de las potencias y los radicales.

Ejemplo:

$(\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

$= (\sqrt{2})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})(2\sqrt{3}) - (\sqrt{2})(\sqrt{5}) - (3\sqrt{3})(\sqrt{2}) -$

$(3\sqrt{3})(2\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})(\sqrt{5})$

$= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\,\sqrt{3} - \sqrt{2}\,\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\,\sqrt{2} -6(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3}\,\sqrt{5}$

$= 2 + 2\sqrt{6} - \sqrt{10} - 3\sqrt{6} - 6 \cdot 3 + 3\sqrt{15}$

$= 2 + 2\sqrt{6} - \sqrt{10} - 3\sqrt{6} - 18 + 3\sqrt{15}$

$= -16 - \sqrt{6} - \sqrt{10} + 3\sqrt{15}$

Operaciones combinadas en $\mathbb{R}$

Para resolver ejercicios que involucren más de una operación, es necesario ir resolviendo en orden, aplicando cada uno de los algoritmos de las operaciones en el conjunto de números reales.

Ejemplos:

- $\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{1 + \dfrac{2}{3}} = 2\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{\dfrac{3}{3} + \dfrac{2}{3}} = 2\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{\dfrac{5}{3}} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\,\dfrac{5}{3} =$
  $\sqrt{3} - 5\sqrt{3} =- 2\sqrt{3}$

- $\dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{7\pi}{5}\right) = \dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\pi}{15} - \dfrac{21\pi}{15}\right) = \dfrac{2\pi}{5} - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{11\pi}{15}\right) =$
  $\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{11\pi}{30} = \dfrac{12\pi}{30} + \dfrac{11\pi}{30} = \dfrac{33\pi}{30} = \dfrac{11\pi}{10}$

En la cuenta bancaria de doña Juana aparece un saldo de - \$100,000 porque se ha sobregirado. Al llamar a la institución bancaria, le informaron que su línea de crédito le puede prestar hasta $\frac{5}{4}$ veces el monto que adeuda. ¿Cuál es el monto máximo que puede prestarle el banco?

Solución: Dado que el banco le indicó a doña Juana que le puede prestar hasta $\frac{5}{4}$ del monto adeudado, se debe calcular el siguiente producto:

$$\frac{5}{4}(-100{,}000.00) = -\frac{500{,}000}{4} = -125{,}000$$

Así, lo máximo que puede registrar la cuenta bancaria de doña Juana es -125,000 y por lo tanto lo máximo que le puede prestar el banco es 125,000

- **Completa** la siguiente tabla presentando un ejemplo de cada una de las propiedades de las potencias y de los radicales que se indican a continuación.

Potencia en ℝ	
Propiedades	**Ejemplos**
Potencia de una potencia	
Potencia de un producto	
Producto de potencia de igual base	
Cociente de potencia de igual base	
Radicación en ℝ	
Propiedades	**Ejemplos**
Radical de un radical	
Producto de radicales de igual índice	
Cociente de radicales de igual índice	

- **Efectúa** las siguientes operaciones con números reales:

• $\dfrac{\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{4}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{9}{5}} =$

• $(\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 8\sqrt{7}) \cdot (6\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{11}) =$

Se deben tener en cuenta los numeradores y denominadores, es decir, en el producto de dos números reales debemos multiplicar los numeradores y denominadores entre sí.

Dado que la división en la operación inversa de la multiplicación, la división dos números reales se puede reescribir como el producto del dividendo por el inverso del divisor.

$$\frac{1}{3} \div \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1.7}{3.6} = \frac{7}{18}$$

Un carro recorre 60 kilómetros en $\frac{5}{4}$ de hora y otro carro recorre 36 km en 27 minutos.

¿Cuál es el más rápido?

- Lee informaciones, en diferentes contextos, y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales y los irracionales, resuelve un problema del contexto, en el que se apliquen los conocimientos sobre ellos.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas, para interpretar soluciones de situaciones diversas, a partir de los conocimientos sobre números reales.

Actividad grupal

Mi plan alimenticio

¿Qué haremos?

- Uno de los aspectos para mantener un estilo de vida saludable es el control del requerimiento calórico para una dieta balanceada. En este proyecto de la unidad, se estará realizando un plan alimenticio semanal.

¿Qué necesitamos?

- Lápiz, papel, báscula, cinta métrica, calculadoras.

¿Cómo nos organizamos?

- **Formar** triadas o parejas donde todos tienen igual responsabilidad, para la ejecución de las actividades.

¿Cómo lo haremos?

- Investigadores han diseñado modelos matemáticos que permiten calcular el número de calorías que necesita el organismos humano, en función de sexo, masa (kg), altura (m) y edad. Roza y Shizgal , propusieron las siguientes fórmulas, para el cálculo del metabolismo basal:

    - **Hombre:** $13.707 \cdot M + 492.3 \cdot A - 6.673 \cdot E + 77.607005$
    - **Mujer**: $9.740 \cdot M + 172.9 \cdot A - 4.737 \cdot E + 667.051005$

    En donde M representa la masa, A representa la altura y E representa la edad. Para calcular el gasto energético, se debe multiplicar el valor obtenido por unos de estos factores, según el estilo de vida:

    - ¿Cuál será nuestro consumo calórico? ¿Cómo podemos elaborar un plan alimenticio balanceado?

Ejecución del proyecto

Primera etapa

Fase 1. Mediciones

Completa la siguiente tabla, presentando las informaciones que se solicita de los miembros de tu equipo. Para el cálculo de la masa y de la altura, haz uso de la báscula y de la cinta métrica.

Estilo de vida	Factor
Sedentarismo	1.375
Actividad física ligera	1.56
Actividad física moderada	1.64
Actividad física intensa	1.82

Fase 2. Determinar el consumo calórico

Utilizando el modelo de Roza y Shizgal y los estilos de vida de cada miembro del grupo, **calcula** el gasto calórico de cada uno y presenta el promedio.

Fase 3. Elaboración de dieta balanceada

Investiga sobre las cantidades de calorías que poseen los alimentos que consumes habitualmente. Elabora un plan alimenticio que permita cubrir los gastos de energía diarios.

Segunda etapa

Presentación y socialización de la actividad

Presenta los resultados obtenidos, asociados al gasto calórico y el plan alimenticio que elaboraron.

Comparen los resultados obtenidos en los distintos grupos y comenten las causas y consecuencias de estos resultados en relación con el estilo de vida y la frecuencia de ejercicio o actividades deportivas que ustedes realizan.

Coevaluación

Comenta cómo se distribuyeron las responsabilidades al momento de ejecutar el proyecto y cuáles fueron los aportes de cada integrante.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo **responde** a la siguiente pregunta: ¿qué cambios puedo hacer en mi plan alimenticio para llevar una vida más saludable ?

- Aplica, a través de la puesta en común de un trabajo en equipo, los conocimientos sobre numeración, para dar posibles soluciones ante situaciones de salud que se presentan en la comunidad.

Evaluación

- **Realiza** un diagrama de Venn-Euler, donde presentes el conjunto de los números reales y los conjuntos numéricos que están incluidos. Adicionalmente, ubica en el dibujo los siguientes números reales.
  - $\sqrt{(-125)}$
  - $-\pi$
  - $\frac{1}{9}$
  - 3.5555…
  - $2e \times 3\pi$
  - $3\sqrt{2}$
- **Ubica**, en la recta numérica, los siguientes números reales y ordénalos de manera ascendente y descendente.

$$\frac{3}{5}; -9; \frac{1}{2}; 0; \sqrt{5}; -e; \frac{10}{4}$$

- **Construye** un organizador gráfico, donde presentes las operaciones definidas en el conjunto de los números reales y las propiedades que se verifican.
- **Completa** los siguientes cuadrados mágicos. Para esto, debes conseguir que la suma de los números enteros de cualquier fila, columna o diagonal sea la misma.

	−3	4
		−1
2		0

7		
		10
5	4	−3

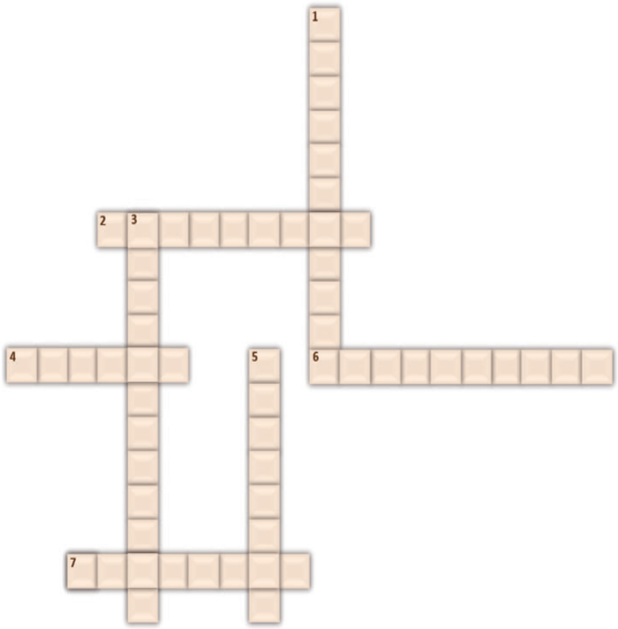
- **Completa** las siguientes tablas, aplicando los algoritmos de la operación que se indica en la primera casilla y operando los números reales que están en la primera fila con los de la primera columna.

$+$	-1	0	π	$-\frac{1}{3}$	2
5					
-2					
$\frac{4}{5}$					
e					
$\sqrt{2}$					

$\cdot$	$2/5$	-3	$\sqrt{2}$	-1	9
0					
2					
$-\frac{7}{3}$					
-8					
$\sqrt{2}$					

- Si el valor absoluto de un número real es igual a 4, ¿cuál es el número?
- ¿Qué número multiplicado por 3 y sumado con $\frac{1}{2}$ es igual a 5?
- Si todos los números racionales son números reales, entonces es cierto que:
  - Todos los reales son racionales.
  - Algunos racionales son reales.
  - Ningún racional es real.
  - Algunos reales son racionales.

- Completa el siguiente crucigrama:



Vertical

- Propiedad de la adición, la cual indica que no importa el orden de los sumandos, la suma no cambia.
- Propiedad que relaciona la multiplicación con la adición.
- Nombre de los números reales que, cuando se suman, el resultado es igual a cero

Horizontal

- Nombre del elemento que cuando efectuamos el producto, el valor no varía.
- Nombre del elemento que cuando efectuamos la suma, el valor no varía.
- Nombre de los números reales distintos de cero, que cuando se multiplican el resultado es igual a 1.
- Propiedad de la multiplicación que afirma que, no importa cómo se agrupen los factores, el producto no cambia.

- Dada una cuerda, Marta coge la mitad; de lo que queda, Juan coge la mitad; de lo que queda, Adrián coge la mitad; de lo que queda, Carmen coge $\frac{2}{5}$. Al final quedan 30 cm.

  ¿Cuál era la longitud de la cuerda?

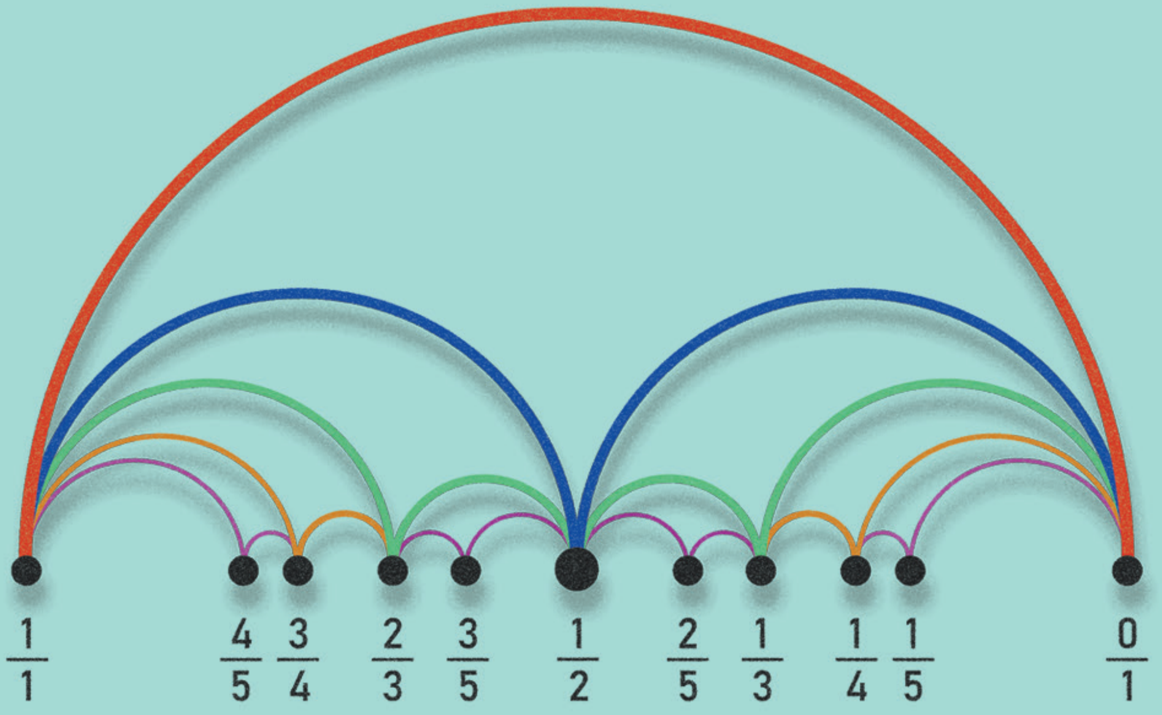
- Para **determinar** la temperatura y la presión atmosférica en los primeros 500 metros de altura, a partir del nivel de mar, se utilizan los siguientes modelos:

  $$T = 15 - \left(\frac{h}{150}\right)$$

  $$P = 760 - \left(\frac{4}{45}\right)h$$

Siendo T la temperatura de la atmósfera, en grado Celsius; P la presión atmosférica, en mm de mercurio y h la altura, desde el nivel del mar.

- Según estos modelos presentados, ¿qué temperatura y que presión atmosférica existe, cuando la altura es 450m?
- Según estos modelos presentados, ¿qué temperatura hay en la atmósfera, cuando la presión atmosférica es 744 mm de mercurio?



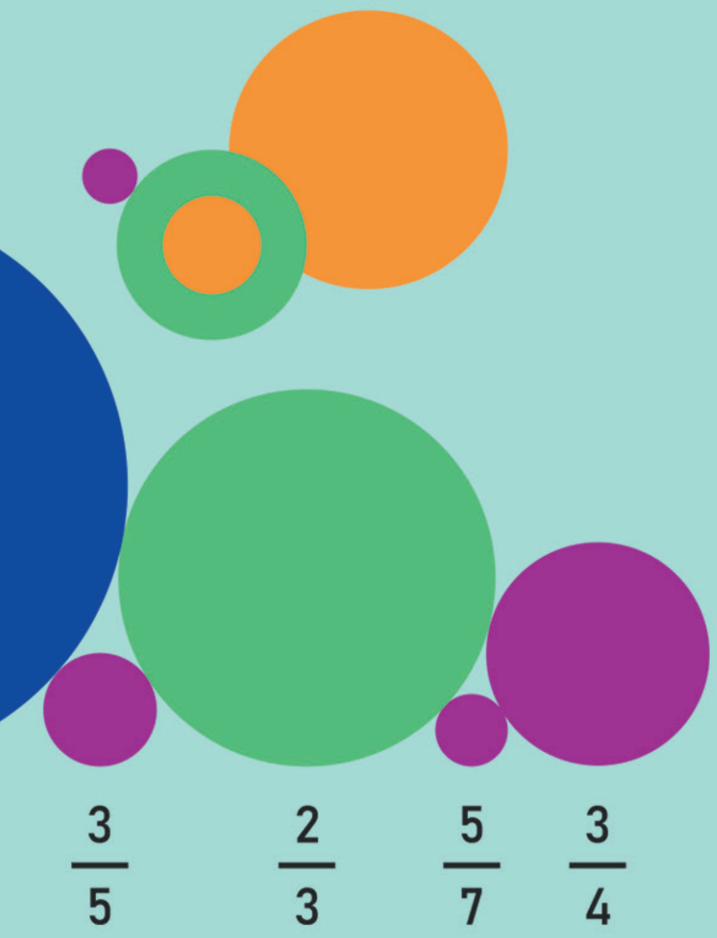
1/2

Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 3

Generalización



Situación de aprendizaje

La sucesión de Farey-Haros, de orden *n*, tiene por términos todas las fracciones reducidas entre 0 y 1, con denominadores menores o iguales a *n*.

Los círculos de Ford, que son tangentes entre sí, están relacionados con la sucesión de Farey-Haros.

Esta sucesión tiene numerosas aplicaciones. una de ellas es el diseño de engranajes para relojes mecánicos.

Toma tres términos consecutivos cualesquiera, en la sucesión de Farey-Haros de orden 5 (F5), ¿observas algún patrón entre los numeradores y denominadores de esas tres fracciones? ¿Cuál es ese patrón?

Contenido

- Patrones numéricos
- Patrones geométricos
- Construcción de patrones
- Reconocimiento de patrones
- Relaciones
- Actividad grupal
- Evaluación

Patrones numéricos

¿Cuál es el término que falta en la sucesión: 1,2,4,8,_,32,64?

Sucesiones crecientes y decrecientes

Para estudiar la sucesión :

$1,552,384;\ 776,192;\ \ 388,096;\ \ 194,048;\ \ldots;\ 798;\ \ 399$

Se **comienza** identificando su primer término, en este caso, es el número: 1,552,384, luego, se trata de hallar su patrón o regla de formación. Se indaga sobre las posibles relaciones entre dos términos consecutivos cualesquiera, se elabora una conjetura y se comprueba con otros pares de términos consecutivos.

Dos números cualesquiera se pueden comparar dividiéndolos o restándolos. Probemos con los dos primeros términos de la sucesión. Se divide 1,552,384 entre 776,192. Usa una calculadora para realizar esta división. El resultado es 2. Entonces, podemos escribir la igualdad:

$1{,}552{,}384 \div 2 = 776{,}192.$

que también se puede escribir como:

$1{,}552{,}384 \times \frac{1}{2} = 1{,}552{,}384 \text{ x } 0.5 = 776{,}192.$

La conjetura inicial es que, dado el término inicial, cada término siguiente de la sucesión se obtiene dividiendo entre 2 o multiplicando por, $\frac{1}{2}$ el término inmediato anterior. Comprueba, con una calculadora, que lo mismo se cumple para otros pares consecutivos de términos, de la sucesión dada. Como pudiste comprobar, se cumple la conjetura, entonces, el patrón de esta sucesión es: «dividir por 2», «multiplicar por $\frac{1}{2}$ » o «multiplicar por 0.5».

Consideremos la sucesión: 880,450; 880,480; 880,510; 880,540 …

Observa cuidadosamente cada término de la sucesión y compáralo con el término inmediato anterior. ¿Qué se mantiene constante? ¿Qué varía?

Se puede usar una hoja de cálculo para explorar las relaciones entre los términos de una sucesión que permite realizar, automáticamente, comparaciones entre varios términos de una sucesión, de manera simultánea.

Aa

Una sucesión es una colección ordenada de términos, generados por un patrón dado.

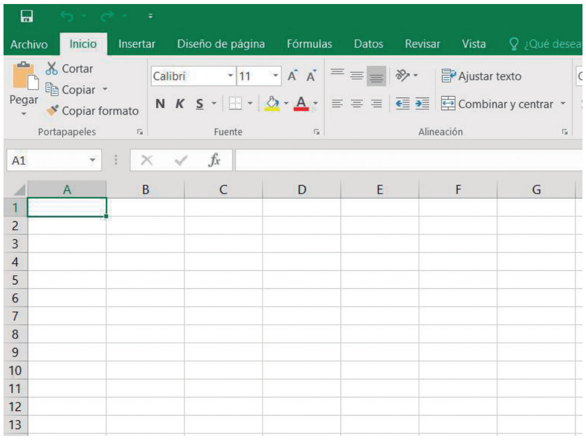
La primera calculadora digital portátil, la Handy, fue fabricada en Japón, en 1970, por la compañía Busicom.

Fuente: thecalculatorsite.com

En el lenguaje matemático, los tres puntos suspensivos (…) se usan para indicar que hay un cierto número de términos entre los términos dados o que la sucesión continúa indefinidamente.

Dividir por un número es igual a multiplicar por su inverso multiplicativo. Por ejemplo:

$857{,}560 \div 5 = 857{,}560 \text{ x } \frac{1}{2}$



En esta sucesión hay cambios a partir de las decenas. Todos los términos tienen constante el dígito, en la posición de las unidades. No resulta difícil comprobar que cada término se obtiene sumando 30 al anterior.

Dadas las dos sucesiones anteriores, en la primera, cada término es menor que el anterior, estas se denominan sucesiones decrecientes. En la segunda, cada término es mayor que el anterior, estas se conocen como sucesiones crecientes.

Generalización de un patrón

A veces, se requiere hallar el término de una sucesión sin calcular el término inmediato anterior. Para ello, se generaliza el patrón y se asocia al número de la posición, en la sucesión del término que se quiere hallar.

Dada la sucesión: 4; 12; 36; 108; 324… Su primer término es el 4, ¿cuál es su patrón? No resulta difícil comprobar que el patrón es: «multiplicar por 3». Si se multiplica el primer término por 3 obtenemos $4 \cdot 3 = 12$; el segundo término es $12{\cdot}3 = 36$, lo cual se puede escribir como:

$36 = 12 \cdot 3 = (4 \cdot 3){\cdot}3 = 4{\cdot}(3 \cdot 3) = 4 \cdot 3^2$. Repitamos este procedimiento para el 4° término, $108 = 36 \cdot 3 = (12 \cdot 3){\cdot}3 = ((4 \cdot 3){\cdot}3){\cdot}3 = 4(3 \cdot 3 \cdot 3) = 4 \cdot 3^3$.

Cada término se puede hallar multiplicando el 4 por una potencia de base 3. ¿Por cuál potencia de 3 hay que multiplicar a 4 para obtener el quinto término? ¿**Halla** el término en la posición 16?

- **Halla** el patrón en cada una de estas sucesiones y determina, en cada caso, si es creciente o decreciente. **Usa** alguna herramienta tecnológica.
  - 12; 72; 432; 2,592; …
  - 889,728; 889,528; 889,328; 889,128; …

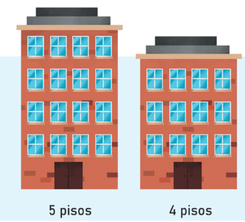
Posición	Término
1	$4 \cdot 3^0$
2	$4 \cdot 3^1$
3	$4 \cdot 3^2$
4	$4 \cdot 3^3$
5	$4 \cdot 3^4$

¿Qué relación hay entre la posición y el exponente de la base 3?

- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación algebraica, financiera, geométrica y estadística.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas, a partir de los conocimientos sobre números reales, álgebra, geometría, finanzas y estadística.

Patrones geométricos

En una sucesión de edificios de varios pisos, ¿cuántos edificios hay que construir, en el orden indicado, hasta llegar al edificio de un solo piso? Debes responder sin dibujar los edificios que faltan.



En sentido numérico, las **sucesiones geométricas** son de números reales, tales que el cociente entre todos los pares de términos consecutivos es constante. Esta constante se llama razón. A este tipo de sucesiones se les suele llamar progresiones geométricas.

Patrones y sucesiones geométricas

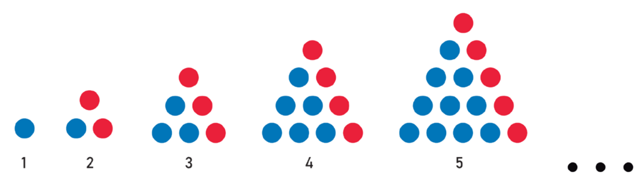
En matemáticas, la expresión **sucesiones geométricas** se refiere a dos tipos de objetos matemáticos diferentes, expresados en forma numérica o geométrica. En la sección anterior se estudiaron algunas sucesiones geométricas en el sentido numérico. Aquí nos referiremos a las sucesiones geométricas, cuyos términos son figuras geométricas. Estas sucesiones incluyen un patrón en el que se toman en cuenta las propiedades de las figuras geométricas. Estas sucesiones se estudian en conexión con las sucesiones numéricas.

Los números poligonales, representados mediante figuras hechas con piedritas o puntos, fueron estudiados por matemáticos en la antigua Grecia, hace muchos siglos, antes de nuestra era.

Fuente: https://womenyoushouldknow.net/theano-of-croton-pythagorean/

Los números poligonales

Los números poligonales son unas de las sucesiones geométricas más antiguas y populares. Se trata de números representados por puntos en el plano, distanciados uniformemente, que toman la forma de un polígono regular. Por ejemplo, una sucesión de números triangulares es la siguiente:



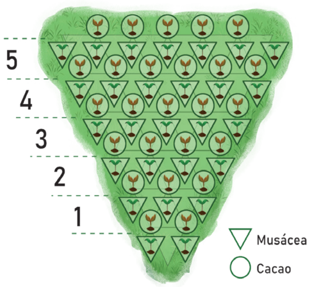
Para expresar numéricamente la sucesión de números triangulares, contamos el número total de puntos en cada triángulo. El patrón de formación viene indicado por el número de puntos en color rojo. Los números triangulares se denominan con la letra T. El primer número triangular es T1 = 1. El segundo es T2 = 3. Completa en tu cuaderno la tabla siguiente:

Orden	Término
T_1	1
T_2	3
T_3	
T_4	
T_5	

¿Cuánto se suma al término anterior para obtener un término dado? ¿Cuál es el patrón? ¿Cuál es el término T10?

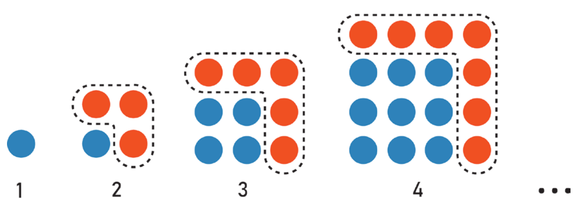
Patrones en todas partes

Los patrones geométricos se encuentran en la naturaleza y en muchas actividades realizadas por el ser humano, como en la agricultura.



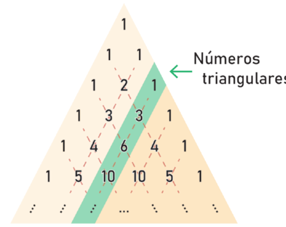
El cacao es uno de los principales productos agrícolas de nuestro país. Para la siembra de cacao en terrenos con pendientes se recomienda distribuir las plantas en forma triangular. ¿Cuál es el patrón geométrico de la sucesión en cada fila numerada? Halla la sucesión formada por el número de plantas en cada una de las filas numeradas. Registra los datos en una tabla.

- Dada la sucesión de números cuadrados C1, C2, C3, C4, …



- **Halla** los seis primeros términos de la sucesión. Halla el término C10. ¿Qué relación hay entre los términos de la sucesión de números triangulares y los términos de la sucesión de números cuadrados?

En el triángulo de Pascal se encuentra la sucesión de los números triangulares.



Los términos, diferentes de 1, de este triángulo se obtienen sumando los dos números inmediatos en la fila anterior. Esto se señala con las líneas rojas.

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

El **perímetro** de un polígono es igual a la suma de la longitud de cada uno de sus lados.

Fibonacci era el nombre usado por el matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250). Uno de sus libros más conocidos es el *Liber Abaci*, en el cual introdujo el sistema de numeración posicional indoarábigo en Europa.

Fuente: https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-f-j/200-fibonacci-leonardo-da-pisa

Construcción de patrones

¿De qué color es el término 25 de la sucesión?  ...
Justifica tu respuesta.

Elaborar un patrón

Se necesita un patrón para construir una sucesión. También se precisa un término inicial. Por ejemplo, tomando como término inicial un triángulo equilátero de lado 1 y como patrón agregar otro triángulo con un lado común.

1 2 3 ...

Los términos de esta sucesión son el **perímetro** de cada figura geométrica, obtenida mediante el patrón anterior. Los primeros cuatro términos se muestran en la tabla siguiente.

Término	Perímetro
1	3
2	4
3	5
4	6

Construye un patrón para generar una sucesión, cuyo primer término sea un hexágono regular. Dibuja tres términos de la sucesión en tu cuaderno.

Sucesión tipo Fibonacci

La **sucesión de Fibonacci** aparece en muchas situaciones naturales y matemáticas. Su patrón es sencillo; todo término que la integra, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos términos anteriores. Los dos primeros términos son 1 y 1, entonces el tercero es 1 + 1 = 2.

¿Cuáles serían los primeros cinco términos de una sucesión, cuyos dos primeros términos sean 3 y 3 y su patrón, similar al de la sucesión de Fibonacci? Escribe la respuesta en tu cuaderno.

Combinación de patrones

Se pueden construir nuevos patrones combinando patrones conocidos, por ejemplo: multiplicar por 0.5 y sumar 3. Aquí se combina el patrón «multiplicar por» con «sumar».

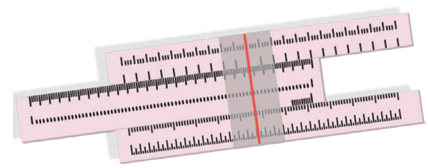
Con una calculadora básica se puede **hallar** una sucesión, con un patrón numérico combinado. Si se quieren encontrar algunos términos de una sucesión, cuyo primer término es 6 y su patrón de formación es «multiplicar por 5 y sumar 4», se escribe el primer término en la calculadora y repetimos el patrón, según el número de términos deseados.

En esta primera aplicación del patrón se obtuvo el segundo término. Continuamos aplicando el patrón, para hallar dos términos más.

Así, se obtuvieron los primeros cuatro términos de la sucesión: 6, 34, 174, 874. Repitiendo el patrón se pueden hallar más términos de la misma.

- **Elije** dos números racionales cualesquiera. **Construye** un patrón, combinando la división por el primer número y la adición del segundo. **Halla** la sucesión con ese patrón y el primer término igual a 1.73.

Antes de la invención de las calculadoras digitales, los cálculos se hacían con un instrumento analógico, llamado regla de cálculo.



Pedro expresó el primer término de una sucesión como: $4+3\cdot 7$ y obtuvo como resultado 49.

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

Una **fracción decimal** es aquella con denominador igual a 10 o a una potencia de 10. Por ejemplo:

- $\dfrac{7}{1{,}000} = \dfrac{7}{10^3}$

El escocés John Napier (1550-1617), fue uno de los primeros matemáticos que usó la notación decimal actual para representar las fracciones decimales.

Ministerio de la Vivienda y Edificaciones (Mived)
El Mived es una institución que tiene como misión: "desarrollar y elevar la calidad de vida de los dominicanos, a través de la transformación de las edificaciones a nivel nacional como garantía de un mejor futuro."

https://mived.gob.do/

Reconocimiento de patrones

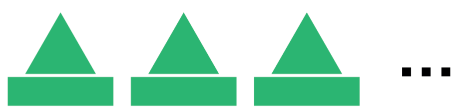
¿Cuál es el patrón de la sucesión 5, 25, 125, 625, …?

Patrones en arquitectura

En el reconocimiento de patrones se recurre a patrones conocidos y combinaciones de estos. Observa, detalladamente, la fachada siguiente e identifica los patrones geométricos que reconozcas.

Fuente: https://dominicaninteriordesigners.com/

En esta fachada se pueden identificar varios patrones de repetición. Uno de ellos es la repetición de la figura formada por un triángulo equilátero sobre un rectángulo. Ese patrón se reproduce indefinidamente, para formar la sucesión:



Dibuja, en tu cuaderno, otra sucesión que identifiques en la fachada.

Observa la baranda de una casa que se muestra en la figura siguiente.

Fuente: diariolibre.com

Dibuja, en tu cuaderno, una sucesión con términos geométricos que identifiques en esta baranda. Remarca con color rojo el patrón de repetición. Recuerda que estudiamos patrones que se repiten a lo largo de una línea o franja.

Los números racionales se pueden escribir como números decimales con la parte decimal finita, como 3.25, o con la parte decimal infinita periódica, como 4.666666666…

Más patrones numéricos

Los dígitos de los números decimales periódicos siguen cierto patrón. Consideremos el número: 7.3333…

Podemos descomponer ese número como la suma de su parte entera y su parte decimal como: 7 + 0.3333… Se puede seguir descomponiendo la parte decimal, según cada valor de posición:

$7.3333\ldots = 7 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$

Podemos **escribir** cada uno de los sumandos de la parte decimal como una **fracción decimal:**

$$7.3333\ldots = 7 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1{,}0000} + \frac{3}{10{,}0000} + \ldots$$

$$7.3333\ldots = 7 + 3\left(\frac{3}{10}\right) + 3\left(\frac{3}{100}\right) + 3\left(\frac{3}{1{,}0000}\right) + 3\left(\frac{3}{10{,}0000}\right) + \ldots$$

$$7.3333\ldots = 7 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{10}\right)^4 + \ldots$$

Se tiene entonces que, todos los sumandos en la parte decimal del número 7.3333… forman una sucesión, cuyo primer término es $3\left(\frac{3}{10}\right)$ y su patrón es multiplicar por $\frac{3}{10}$.

Las casas estilo victoriano caribeñas son producto del encuentro entre culturas. Estas casas son testigos de un proceso de mezcla de culturas.

- Dado el número racional periódico: 2.4545454545… **Halla** los primeros cinco términos de la sucesión de sumandos que forman la parte decimal periódica de dicho número.

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

Una **relación matemática:** es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, mediante la cual, a cada elemento del primer conjunto se le hace corresponder al menos un elemento del segundo conjunto.

La **recta numérica:** es una recta en el plano sobre la cual se indican un punto de origen, una unidad y un sentido positivo (el sentido contrario es negativo).

Manuel le dijo a Luisa que el resultado de la adición de 560 más 245 es un número par.

Relaciones

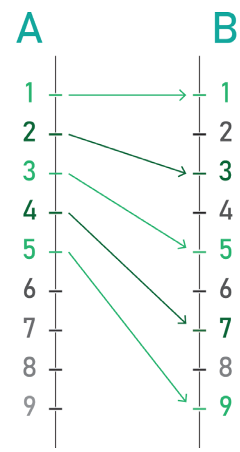
Si multiplicamos 8 por 3, ¿cuál es la relación entre 8 y 24?

Un tipo especial de relación

Sea A la sucesión de los números naturales sin el cero y B la sucesión de los números impares.

A = {1, 2, 3, 4, 5, …} y B = {1, 3, 5, 7. 9, …}

Una relación entre estas dos sucesiones se puede representar gráficamente de la manera siguiente:



En esta gráfica se relacionan los términos de estas sucesiones. Al primer término de la sucesión A le corresponde el primer término de la sucesión B; al segundo término de A le corresponde el segundo término de B y así sucesivamente.

Cada uno de los números, en la recta numérica de la derecha, se puede calcular a partir del correspondiente número natural, multiplicado por 2 y restándole 1. Para los términos 2 y 3:

$$2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$2 \cdot 3 - 1 = 5$$

¿Cuál número impar le corresponde al número natural 321? Este patrón lo podemos escribir, de forma general, de la manera siguiente:

$$2n - 1$$

Donde n es un número natural cualquiera, diferente de cero. Si $n = 10$, el término correspondiente es $2 \cdot 10 - 1 = 19$. El número n indica la posición del término en la sucesión.

En el lenguaje matemático, al escribir el producto de un número por una variable o incógnita, suele omitirse el signo de la multiplicación. Por ejemplo:

- $7 \cdot n = 7n$

Relaciones en situaciones reales

Supongamos que Juan ahorra RD$20 semanalmente. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno.

Semanas	Ahorro (RD$)
1	20

Halla el patrón de la sucesión de términos de ahorro semanal. ¿Cuánto habrá ahorrado Juan, después de 8 semanas? ¿Cuánto ha ahorrado, después de 6 meses?

Se sabe que la edad de un perro no es igual a la edad de un ser humano. En la siguiente tabla se muestra la relación entre las edades de un perro pequeño que pese menos de 20 libras y un ser humano.

Edad del perro	Edad en años humanos
1	15
2	24
3	28
4	32

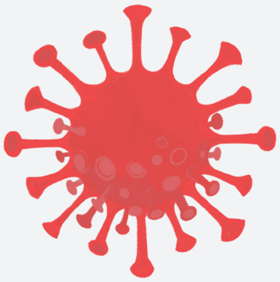
María tiene un perro pequeño que tiene 9 años de edad y quiere saber a cuántos años humanos equivale esa edad. María no sabe cómo calcularla. Ayúdala y dile de cuántos años humanos es la edad de su perro.

- Dadas las dos sucesiones: Sucesión A. Primer término: 1, patrón: sumar 0.5; y Sucesión B. Primer término: 3, patrón: sumar 4.
- **Confecciona** una tabla con cinco términos de cada sucesión. **Elabora** una gráfica, para representar la relación entre las sucesiones.

- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

Actividad grupal

Propagación del coronavirus (COVID-19)



COVID - 19
Coronavirus

¿Qué haremos?

Aplicaremos los conocimientos aprendidos sobre patrones y sucesiones de términos geométricos y numéricos, para estudiar el patrón de propagación del coronavirus en una población determinada.

¿Qué necesitamos?

Hojas de papel cuadriculado. Lápices de colores. Una computadora con una hoja de cálculo instalada.

¿Cómo nos organizamos?

Forma un equipo, con tres de tus compañeros de clase.

Medida de prevención: distanciamiento social.

¿Cómo lo haremos?

Supongamos que, en una población determinada, una persona contagiada con el coronavirus transmite el virus a otra y así sucesivamente cada día.

Medida de prevención: lavado de manos.

Elaboren un diagrama en el que se muestre el patrón de contagio del virus durante cinco días, después del primer contagio.

Contabilicen el número total de contagiados en cada uno de los primeros seis días. Registren esos datos en una tabla de dos columnas. En la de la izquierda, indiquen el número de días y en la columna de la derecha, registren el número de personas contagiadas, en cada uno de esos días.

Analicen la sucesión, cuyos términos son el número de contagios por día. Determinen el patrón de esa sucesión, en relación con el número correspondiente de días. Escriban la forma general del patrón, donde la letra n represente el número de días.

Escriban en las celdas de la columna A de una hoja de cálculo, el número de cada día. (Figura 1.) En cada celda correspondiente de la columna B, escriban la forma general del patrón, para generar el número de contagios de cada día.

En una hoja de cálculo, las fórmulas se escriben siempre comenzando con el signo «=». (Figura 2.) Al lado derecho del signo de igualdad se escribe la expresión matemática, indicando los cálculos que deben realizarse. Por ejemplo, para sumar 4 a los números en las celdas de la fila A, se escribe en la primera celda de la columna B la fórmula: = a1 + 4. Donde a1 es el nombre de la primera celda de la columna A.

Hallen, usando la hoja de cálculo, el número de personas contagiadas los días 50 y 72. Impriman la hoja de cálculo con todos los datos.

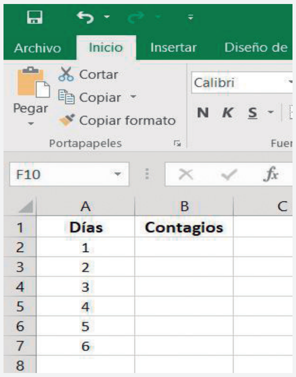


Figura 1.

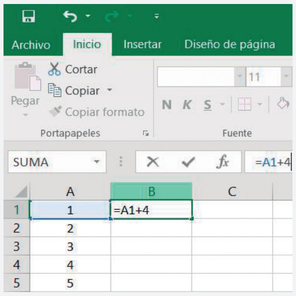


Figura 2.

Presentación y socialización de las actividades

El resultado de esta actividad debe ser presentado en un informe escrito, en el que expliquen, detalladamente, cada paso seguido en la realización de la actividad y el conocimiento matemático aplicado, hacer referencia a los conocimientos (conceptos, procedimientos, actitudes y valores) aprendidos. Deben presentar conclusiones y recomendaciones para evitar el contagio de enfermedades virales, a partir de lo aprendido en esta actividad.

Coevaluación

Cada uno de los miembros del equipo debe escribir en el informe una valoración del trabajo realizado por un compañeros en esta actividad.

Autoevaluación

Cada uno de los miembros del equipo debe escribir en el informe un breve párrafo, en el que comente acerca de lo aprendido durante la actividad, dificultades en su realización y aspectos que debe mejorar para futuras actividades grupales.

- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas, para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre números reales, álgebra, geometría, finanzas y estadística.
- Utiliza, en la presentación de un informe de investigación, los conocimientos sobre numeración, álgebra, geometría y estadística, aplicando recursos de la tecnología.

Evaluación

- **Dada** la sucesión 5; 25; 125; 625; … ¿Cuáles son los tres últimos dígitos del término 47?
- Dado el número racional periódico:

  3.173173173… **Halla** los primeros cuatro términos de la sucesión de sumandos que forman la parte decimal periódica de dicho número.
- Dados los siguientes números racionales periódicos, halla la sucesión formada por los términos que representan la parte decimal periódica de cada uno de ellos.
  - 3.647647647647…
  - 0.932323232…
- ¿Cuáles son los términos que faltan en la sucesión?

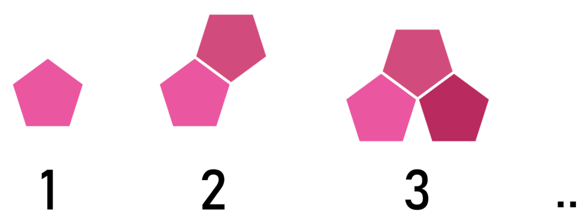
  100; 50; 25; __; 6.25; 3.125; ___; 0.78125
  - 10 y 3.01
  - 5 y 0.625
  - 12.5 y 6.0125
  - 12.5 y 1.5625
- En el segundo piso de la Casa de las Academias, podemos ver la baranda que se muestra en la figura. **Observa** y analiza la figura y representa una de las sucesiones geométricas presentes. Identifica el patrón.

Fuente: acento.com.do

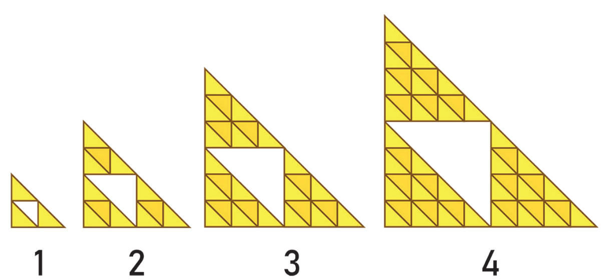
- Una persona no pesa los mismo en la Tierra que en la Luna, porque el peso de un cuerpo depende de la fuerza de la gravedad. En la tabla siguiente, se muestra la relación entre el peso de un cuerpo en libras, en la Tierra y en la Luna.

Peso en la Tierra	1	2	3	4
Peso en la Luna	0.17	0.34	0.51	0.68

  ¿Cuál es el patrón de la sucesión de pesos de una persona en la Luna, en relación con su peso en la Tierra? ¿Cuánto pesa en la Luna una persona que pesa en la Tierra 90 libras? ¿Cuánto pesas tú en la Luna?
- Dada la siguiente sucesión de pentágonos. **Halla** el perímetro de cada término de la sucesión. Escribe los resultados en una tabla y halla el patrón de la sucesión de los perímetros.

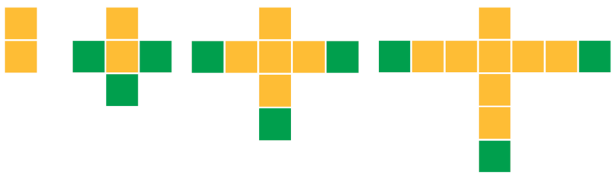


- Dada la siguiente sucesión de triángulos:



  - **Escribe** la sucesión formada por el número de triángulos amarillos.

- **Determina** el cociente común, entre dos términos consecutivos cualesquiera.
- **Halla** el patrón de esta sucesión.
- En la siguiente sucesión, cada término está formado por cuadrados de área de una unidad.

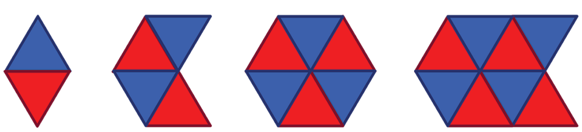


1 2 3 4

- **Completa**, en tu cuaderno, la tabla siguiente:

Número del término	Área
1	
2	
3	
4	

- **Escribe** el primer término y la diferencia común entre dos términos consecutivos.
- ¿Cuál es el área del término número 9?
- En esta sucesión, cada término es formado por un cierto número de triángulos.



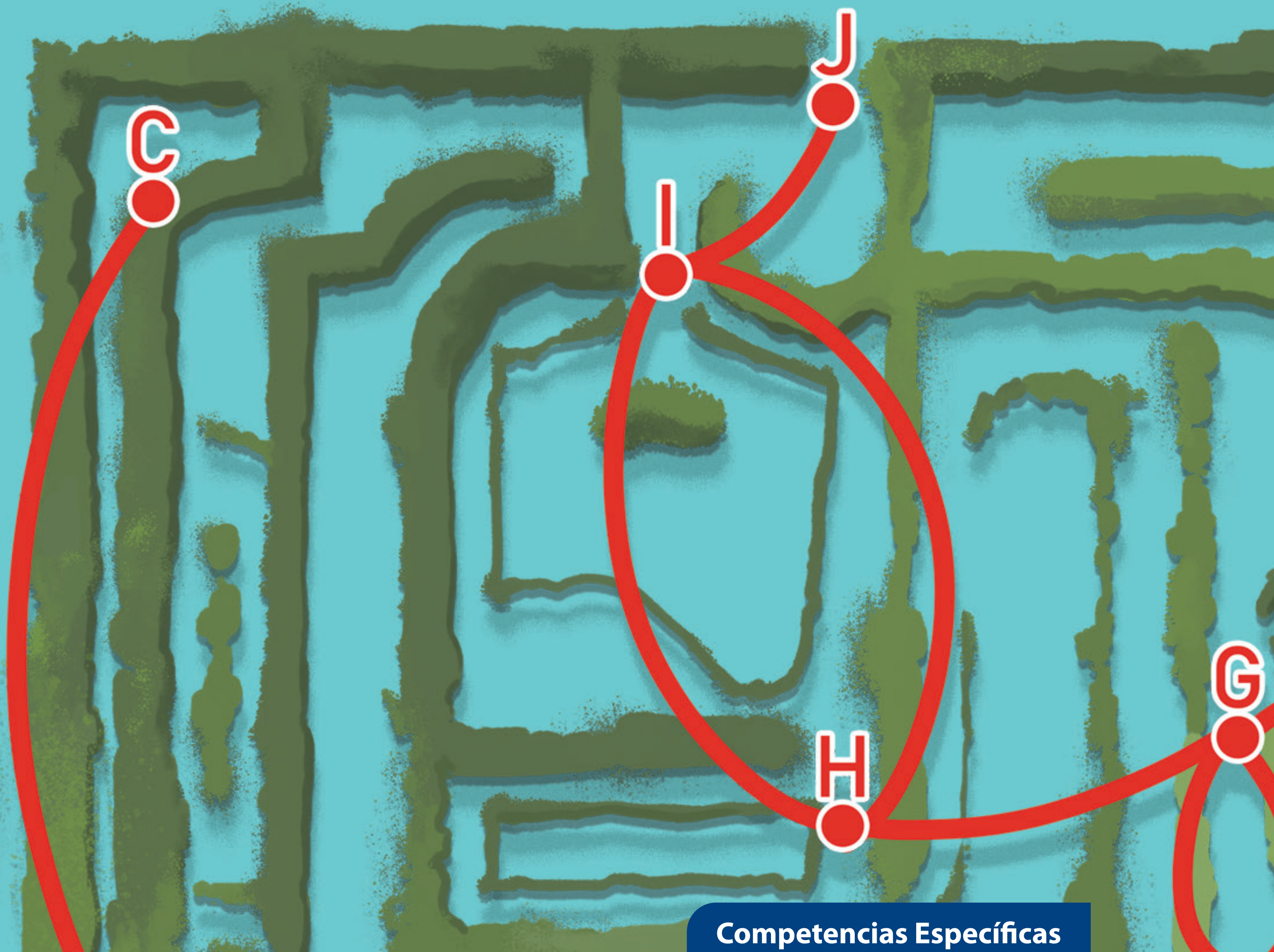
1 2 3 4

- **Completa**, en tu cuaderno, esta tabla:

Número del término	Número de triángulos
1	
2	
3	
4	

  - ¿Cuál es el primer término?
  - ¿Cuál es la relación entre el número del término y el número correspondiente de triángulos?

- **Escribe** esa relación en una expresión general, donde la n represente un número cualquiera, de un término de la sucesión.
- Cuál de estas sucesiones sigue el patrón: multiplicar por 5 el término anterior y restarle 2 al resultado.
  - 1, 2, 3, 4, 5, …
  - 1, 3, 13, 63, …
  - 1, 5, 25, 125, …
  - 1, 7, 37, 187, …



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 4

El lenguaje de las matemáticas

Situación de aprendizaje

En el Jardín Botánico Nacional, Dr. Rafael María Moscoso, se encuentra un laberinto vegetal. Puede ser recorrido por diferentes caminos, algunos llevan a veredas sin salida y otros permiten continuar hasta la salida.

Los posibles recorridos en este laberinto se pueden representar en lenguaje matemático mediante un grafo. Un grafo está conformado por un conjunto de puntos, llamados vértices, y de aristas que los unen.

¿De cuántas maneras diferentes se puede ir del punto A al punto I, sin recorrer una misma arista dos veces?

¿Es posible recorrer todo el laberinto vegetal sin caminar dos veces por una misma vereda?

Contenido

- Expresión numérica y algebraica
- Expresión verbal
- Lenguaje algebraico y gráfico
- Transformar expresiones algebraicas
- Evaluar expresiones algebraicas
- Actividad grupal
- Evaluación

Una **expresión matemática:** es un enunciado formado por números, letras o una combinación de ambos que representa un número. Ese número es llamado el valor de la expresión.

Una expresión de un solo término se llama **monomio**, de dos términos **binomio** y de tres términos **trinomio.** En general, cuando una expresión tiene más de un término se llama **polinomio**.

Emmi Noether (1882-1935), matemática alemana, es considerada como la fundadora del álgebra abstracta.

Fuente: https://matematicasdesdecero.com/matematicos-destacados/emmy-noether/

Expresión numérica y algebraica

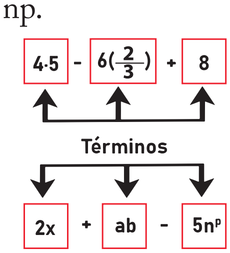
¿Recuerdas qué número se puede expresar como $5 + 7 \cdot 4$?

La matemática es una ciencia que usa su propio lenguaje. Para resolver problemas matemáticamente los expresamos en el lenguaje matemático. En el lenguaje castellano usamos oraciones para registrar y comunicar ideas. En el lenguaje matemático, las **expresiones matemáticas** son algo así como las oraciones en castellano, pero representan relaciones entre números y variables.

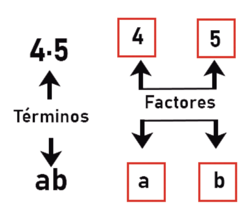
Las expresiones matemáticas

Hay dos tipos de expresiones: numéricas y algebraicas. Las expresiones numéricas son enunciados formados solo por números. Por ejemplo, las expresiones $3+4{\cdot}5$ y $24 - 1$ son expresiones numéricas que representan al número 23. Por su parte, las expresiones algebraicas son enunciados formados por números y letras. Por ejemplo, la expresión x representa a un número cualquiera y la expresión 3x representa un número desconocido.

Las expresiones están compuestas de términos. En la gráfica siguiente identificamos los términos de la expresión numérica $4 \cdot 5 - 6(\frac{2}{3}) + 8$ y de la expresión algebraica $2x + ab - 5np$.



Cada término es el producto de factores. Según los factores que lo formen, los términos pueden ser numéricos o algebraicos. A continuación, mostramos los factores del término $4{\cdot}5$ y del término ab.



En las siguientes expresiones identifica cada uno de los términos y sus respectivos factores: a) $3{\cdot}7 - (\frac{2}{5})9 + 6{\cdot}4$ y b) $5a + xy - 4b$.

Las expresiones algebraicas se clasifican según su número de términos en: **monomios**, **binomios** y **trinomios**. Cuando una expresión algebraica tiene varios términos suele llamarse **polinomio**.

Coeficientes y variables

Los términos de las expresiones algebraicas son de varios tipos. En la expresión ax + 2by + 3·5, el término ax solo de letras, 2by de números y letras y 3·5 solo de números. Los factores literales los llamamos **variables.** Los factores numéricos, en un término con letras y números, lo llamamos coeficiente. En el término 2by el número 2 es su coeficiente.

Igualdad de expresiones matemáticas

El signo de igualdad (=) se usa en matemáticas para indicar que dos expresiones matemáticas son equivalentes. En el caso de expresiones numéricas, usamos el signo de igualdad para indicar que ambas representan al mismo número. Por ejemplo, las expresiones numéricas 14 – 5 y 2·4 + 1 representan al número 9. Entonces, podemos escribir la igualdad:

$14 - 5 = 2 \cdot 4 + 1.$

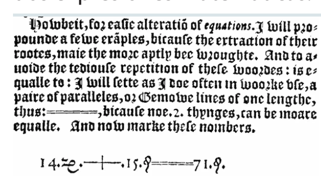
En el caso de dos expresiones algebraicas, se tiene que estas son iguales si cada una se puede transformar en la otra, según las propiedades de las operaciones en los números reales. Por ejemplo, las expresiones algebraicas x + b y b + x son iguales, es decir x + b = b + x, porque la adición de números reales es conmutativa.

¿Cuáles de las expresiones siguientes son equivalentes: 5(3 – 2.5) + 4; 15 – 12.5 +4; 6.5; a(b·c); (a·b)c; ab + ac?

En todo término expresado solo en letras, el número 1 es su coeficiente. También se dice que: cuando el número 1 es un factor, no se escribe en la expresión. Por ejemplo:

El término xy tiene como coeficiente 1.

Robert Recorde (c. 1510-1558), un médico y matemático galés, es reconocido como el primer matemático en introducir el símbolo con dos líneas horizontales paralelas, para indicar la igualdad de dos expresiones matemáticas.


Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

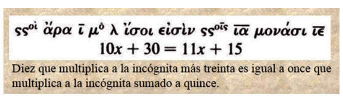
14.ze.—|—.15.ϱ=====71.ϱ.

Fuente:https://www.labrujulaverde.com/2014/05/robert-recorde-el-inventor-del-signo-de-igualdad-matematica.

- Cuáles de las expresiones siguientes son equivalentes:
  - a(b·c)
  - ab + ac
  - (a·b)c
- En la expresión $7 \cdot 9 - xy - (\frac{1}{2})a + 45x + a$, **identifica** sus términos, los factores de cada término, las variables y los coeficientes.

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

La primera etapa del desarrollo del álgebra se caracterizó por representar verbalmente los problemas y sus respectivas soluciones, hasta los cálculos se expresaban completamente en forma verbal. No se usaban símbolos especiales ni siquiera para las operaciones. El álgebra de esa época se denomina álgebra retórica.


ςς^οἰ ἄρα ῑ μ° λ ἴσοι εἰσὶν ςς^οῖς ῑᾱ μονάσι ῑε̄

$10x + 30 = 11x + 15$

Diez que multiplica a la incógnita más treinta es igual a once que multiplica a la incógnita sumado a quince.

Escribe expresiones numéricas para cada número entero del 1 al 10, que tengan solo cuatro cuatros relacionados con las cuatro operaciones aritméticas.

Por ejemplo: el 2 se puede expresar como 4/4+4/4.

Expresión verbal

> ¿Cómo se representa algebraicamente la expresión verbal: «un número real que es el doble de otro número real cualquiera»?

En la vida diaria expresamos conceptos y procesos matemáticos principalmente en **lenguaje** ordinario. Por muchos siglos, antes del desarrollo del álgebra como la conocemos hoy, los matemáticos escribieron usando casi exclusivamente expresiones verbales.

Hoy en día, todavía nos encontramos con problemas matemáticos presentados en forma de expresiones verbales. Resolver dichos problemas, muchas veces requiere traducir esas expresiones verbales en expresiones numéricas o algebraicas.

Varias formas de una expresión

Con frecuencia encontramos enunciados con números expresados en forma verbal, por ejemplo: «dame dos plátanos más»y «pagué la mitad de ese precio». El primer enunciado se puede expresar como B + 2, el segundo como: $\frac{x}{2}$. Al escribir una expresión algebraica hay que especificar el significado de cada letra que aparece en cada término. En estos casos, B es la cantidad inicial de plátanos y x el precio señalado.

El primer paso en la resolución de un problema es comprender su enunciado. No se trata de escoger frases aisladas y traducirlas a expresiones numéricas o algebraicas. Como en toda traducción, es necesario comprender el contexto en el que se encuentran los enunciados para traducirlos correctamente. Una expresión dada se puede escribir de muchísimas maneras diferentes. Por ejemplo:

La expresión	Se puede escribir como:
17 - 3·2	17 – (8 – 2) 27 – 10 - 3·2
un número más siete	un número incrementado en siete siete sumado a un número
$5x + 28$	$4x + x + 28$ $2x + 3x + 14 \cdot 2$

Escribe en tu cuaderno dos enunciados verbales en diferentes palabras que tengan el mismo significado que: «el doble de un número».

Expresión verbal y expresión algebraica

La resolución matemática de muchos problemas requiere traducir una expresión verbal a una expresión algebraica. Es importante identificar las operaciones numéricas indicadas para escribir la expresión correctamente. A continuación, se presentan algunos enunciados verbales y sus correspondientes expresiones algebraicas.

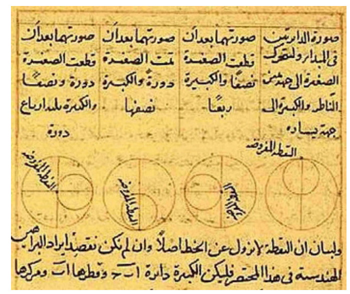
Enunciado verbal	Expresión algebraica
el doble de un número p	$2p$
tres veces x	$3x$
dos números sumados	$a + b$
el cuadrado de un número	y^2
el cubo de un número más su mitad	$x^3 + \frac{x}{2}$
una cantidad más su veinte por ciento	$t(1.20)$
	$t + t \cdot 0.20$
una quinta parte del número s	$\frac{s}{5}$
el producto de dos números	
	$z \cdot w$

En una expresión algebraica, se representan los números desconocidos con letras y relacionados con la operación indicada.

Recuerda que no se trata de memorizar oraciones y su expresión algebraica. Es muy importante comprender primero el problema para identificar las relaciones entre los números y luego plantear las expresiones que sean necesarias para su resolución.

A la humanidad le tomó muchos siglos desarrollar el lenguaje algebraico que permitiera expresar con letras relaciones entre números y figuras geométricas.

Los matemáticos árabes hicieron importantes contribuciones que llevaron al desarrollo del álgebra como la conocemos hoy.



Fuente: https://mundoislam.com/cultura/2018/07/11/matematicas-islamicas-medievales/

- Coevaluación
  - **Pídele** a uno de tus compañeros que escriba una expresión algebraica sin que tú la veas y que la lea en voz alta. **Transcribe** la expresión en forma algebraica y pídele que compruebe si lo hisiste correctamente.

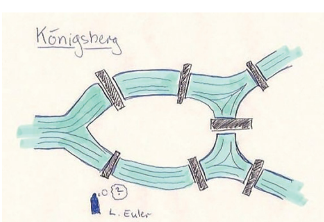
- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.

Lenguaje algebraico y gráfico

Un **grafo** está formado por un conjunto de puntos, llamados vértices, y por aristas que unen a dos vértices. Un **grafo dirigido** es un grafo cuyas aristas pueden recorrerse solo en una dirección.

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Uno de los primeros problemas que dio origen a la teoría de grafos fue el que se planteó Leonard Euler (1707-1783), que consistió en recorrer los siete puentes de la ciudad de Konigsberg, antigua capital de la actual Kaliningrado, Rusia, sin atravesar ninguno de ellos más de una vez.

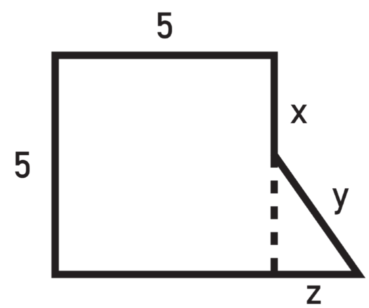


Fuente: https://ingenieriabasica.es/el-problema-de-los-puentes-de-konigsberg/

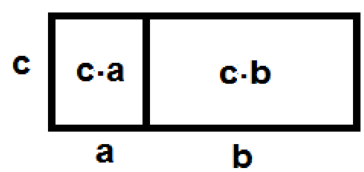
¿Escribe en palabras la expresión algebraica 3x - ½?

Relaciones con la geometría

Uno de los grandes avances alcanzados en las matemáticas fue el de relacionar la geometría con el álgebra. Situaciones dadas geométricamente las podemos representar con expresiones algebraicas. El perímetro de la figura que se muestra a la derecha lo podemos expresar algebraicamente como: 5 + 5 + 5 + x + y + z. Mientras que, el área de la figura la podemos expresar como: la suma del área del cuadrado más la suma del triángulo: $5 \cdot 5 + \frac{1}{2} z(5-x)$.



Tenemos un rectángulo formado por dos rectángulos más pequeños, cuyas áreas se indican en la figura siguiente.

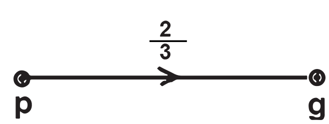


El área del rectángulo más grande es la suma de las áreas de los dos rectángulos más pequeños que lo forman. Esa área la podemos expresar algebraicamente de la siguiente forma: c·a+c·b.

Escribe en tu cuaderno la expresión algebraica del perímetro de ese rectángulo.

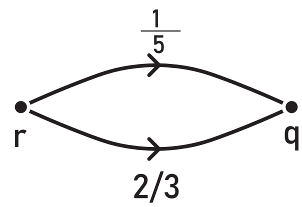
Relaciones con los grafos dirigidos

En una fábrica de cierto producto *g* se necesitan $\frac{2}{3}$ de unidad de la materia prima *p* para producir cada unidad del producto *g*. Esta situación la representamos mediante el siguiente **grafo dirigido**.

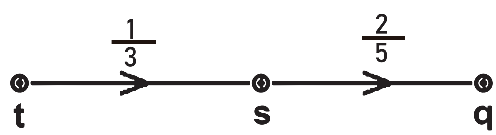


Este proceso también se puede representar mediante una igualdad de expresiones algebraicas como: $q = \frac{2}{3}p$.

Supongamos que por unas tuberías fluye un determinado líquido que se distribuye como se muestra en la figura. Ese proceso lo podemos representar algebraicamente mediante la igualdad: $q=\frac{1}{5}r+\frac{2}{3}r$. Simplifica la expresión de la derecha del signo de igualdad sumando los términos semejantes.



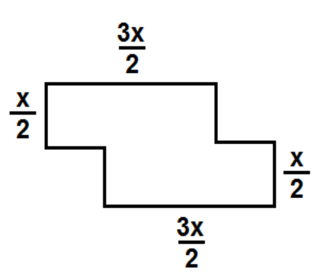
En un cierto proceso industrial, se utiliza una determinada cantidad de materia prima *t* para producir el producto *s*, luego, una cantidad de ese producto s es utilizado para producir el producto final *q*. Este proceso se representa mediante el grafo dirigido en la figura siguiente.



Para **representar** algebraicamente esta situación, se tienen que escribir dos igualdades de expresiones algebraicas. Entre los dos primeros vértices se tiene que: $s=\frac{1}{3}t$. Entre el segundo y el tercer vértice se tiene que: $q=\frac{2}{5}s$.

En los tres casos anteriores, encontramos igualdades de dos expresiones algebraicas que representan una relación entre ellas. En estos casos, si conocemos la cantidad de materia prima podemos hallar la cantidad de producto final que se obtendrá.

- **Representa** algebraicamente el área y el perímetro de la figura.



Los grafos tienen muchas aplicaciones de las cuales nos beneficiamos casi a diario, tales como: prevención de delitos financieros, mercadeo de productos y servicios, logística y análisis financiero.

Fuente: https://www.grapheverywhere.com/10-casos-de-uso-reales-basados-en-tecnologia-de-grafos/

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.

Transformar expresiones algebraicas

¿Son las expresiones numéricas 8 – 6·5 y (8 – 6)·5 iguales? Justifica tu respuesta.

Las expresiones algebraicas, como ya vimos, están formadas por términos y cada término está formado por factores. Una expresión algebraica puede contener algunos términos semejantes. Por ejemplo, en la expresión:

$$5wz + 4w + 3.5z + (\frac{1}{4})wz$$

Sus términos son: $5wz$, $4w$, $3.5z$, $(\frac{1}{4})wz$. El término $5wz$ tiene como factores a 5, w y z, y el término $(\frac{1}{4})wz$ tiene como factores $(\frac{1}{4})$, w y z. Ambos términos tienen como factores las letras w y z. Entonces, son términos semejantes. Mientras que los términos $5wz$ y $4w$, no son semejantes porque no tienen las mismas letras como factores, solo tienen en común la letra w. ¿Son los términos $3.5z$ y $(\frac{1}{4})wz$ semejantes? Justifica tu respuesta.

Dada la expresión algebraica siguiente $3a + 3ab + 5b + 8ba$, identifica sus términos e indica cuáles son semejantes. Justifica tu repuesta.

Reordenar términos de una expresión

Reordenar los términos de una expresión algebraica o numérica es útil para realizar operaciones. Para esto, se usan las propiedades de las operaciones con los números reales.

Resulta conveniente mover un término negativo al comienzo de una expresión. Por ejemplo, reordenar las expresiones:

numérica	algebraica
$-7 + 25$	$-x + y$
$25 - 7$	$y - x$

Aplicando la regla de los signos. Por ejemplo, en las expresiones:

numérica	algebraica
$-10 - 34$	$-x + y$
$-(10 + 34)$	$y - x$

Aa

Los términos de una expresión son términos semejantes si tienen los mismos factores literales elevados a los mismos exponentes, es decir, si tienen las mismas letras como factores. De lo contrario, no son semejantes.

El sabio árabe Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi (c.780-850) es considerado como el creador del álgebra. La palabra algoritmo se origina de su apellido que se pronuncia «aljuarizm».

Fuente: https://mathematicalstamps.eu/news/75

Restar un número es igual a sumar su opuesto. Por ejemplo: 8 – 5 = 8 + (– 5).

Reducción de términos semejantes

Cuando una expresión contiene términos semejantes, estos se agrupan y se expresan como un solo factor según la operación u operaciones indicadas entre ellos. Por ejemplo, en la expresión: $3a + 3ba + 5b + 8b^2a$, agrupamos los términos semejantes en el extremo derecho o izquierdo de la expresión:

$$3a + 5b + (8b^2a + 3ba) = 3a + 5b + (8b^2a + 3b^2a)$$

Realizamos la operación entre los términos semejantes:

$$3a + 5b + 11b^2a$$

La expresión resultante es equivalente a la expresión original. Se dice que transformamos la expresión original en una expresión equivalente.

Reduce los términos semejantes de $5wz + 4w + 3.5z + (\frac{1}{4})wz$.

Reducir expresiones algebraicas es de mucha utilidad para la resolución de ecuaciones.

- **Reordena** la expresión: $-xy + 15x - 8y - 2.5y$.
- **Escribe** tres expresiones equivalentes a: «un número dividido entre tres».
- **Determina** si las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes. Justifica tu respuesta.
  - $-24r - st + 3.7t - 3.5st + (\frac{1}{7})s$
  - $(\frac{1}{7})s - 4.5st - 24r$

Muchas calculadoras suelen tener una tecla especial para escribir el signo menos delante de un número negativo. Estos son dos tipos comunes de esas teclas.

+/-   (-)

Estas teclas son diferentes de la tecla usada para indicar la sustracción de dos números.

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

Sonia Kovalevskaya (1850-1891) fue una matemática rusa muy destacada, se interesó por el álgebra desde muy pequeña. Hizo importantes contribuciones al desarrollo de las matemáticas.

Fuente: https://mujeresconciencia.com/2017/12/06/sonia-kovalevskaya-1850-1891-2/

Evaluar expresiones algebraicas

¿Cuál es el resultado de la operación 5.23 - ___ si se escribe el número 0.23 en el espacio en blanco?

Las expresiones algebraicas se refieren a un número desconocido. Este número está determinado por los valores que tomen las variables que componen la expresión.

Sustitución numérica

La expresión $xr + 4 - b$, representa un número determinado cuando indicamos el valor que toman las variables x, r y b. Para los valores de $x = 5$, $r = -3$ y $b = \frac{1}{2}$, se tiene que el valor de la expresión es:

$$(5)(-3) + 4 - (\tfrac{1}{2}) = -15 + 4 - (\tfrac{1}{2}) = -11 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{21}{2} = -10.5$$

Entonces, para $x = 5$, $r = -3$ y $b = \frac{1}{2}$ se tiene que el valor de la expresión $xr + 4 - b$ es -10.5.

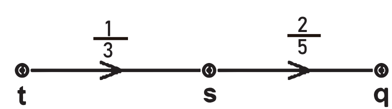
Es recomendable escribir entre paréntesis el número que toma cada variable al sustituirlo en la expresión algebraica.

Halla el valor de la expresión $a^2 - ab - \frac{b}{2}$, para $a = 3$ y $b = 6$.

Sustitución algebraica

Podemos escribir una expresión algebraica como una expresión equivalente, sustituyendo cuando se tienen variables enunciadas también algebraicamente. Por ejemplo:

Retomemos el caso del grafo dirigido que representa un proceso industrial en el que se transforma una materia prima *t* en un producto *s* y luego, ese producto en un producto final *q*.



El proceso completo se podría expresar mediante una sola igualdad de expresiones algebraicas, sustituyendo s en la segunda igualdad por su expresión equivalente. Esto es: $q= \frac{1}{3} (\frac{2}{5} t)$, multiplicando las fracciones se tiene: $q=\frac{2}{15}t$. Esta última igualdad expresa la relación entre la materia prima *t* y el producto *q*.

Recuerda que es muy conveniente agrupar entre paréntesis la expresión que estamos sustituyendo en el lugar de la variable.

Escribe en tu cuaderno la expresión algebraica $\frac{a}{b}$ + 5a – b, para a = 2x b = xy. Recuerda que se pueden simplificar los términos semejantes.

Hallar el valor de una expresión con una hoja de cálculo

Para hallar el valor de una expresión algebraica, dados los valores de las variables que la componen, se puede usar una hoja de cálculo. Por ejemplo: hallar el valor de la expresión algebraica 2x + 1.25xy – 2,347x para x = 1.63 e y = -4,090.

Se escriben las variables y cada término de la expresión en la primera fila y también la expresión completa.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	2x	1.25xy	2,347x	2x + 1.25xy – 2,347x
2	1.63	–4090	=2*A2	=1.25*A2*B2	=2,347*A2	=C2+D2-E2

En la fila siguiente se ingresan los valores de cada variable y las fórmulas para calcular el valor de cada término y de la expresión.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	2x	1.25xy	2,347x	2x + 1.25xy – 2,347x
2	1.63	–4,090.00	3.26	–8.375	3,825.61	–12.155.725

Entonces el valor de la expresión 2x + 1.25xy – 2,347x es –12,155.725.

- **Halla** el valor de la expresión algebraica 3.72ab – 6b + 7,050 a – 512c, para a = 8, b = -274 y c = 0.3, usando una hoja de cálculo. Respuesta: 49,736.16.

Existe un orden entre las operaciones aritméticas. Estas se deben realizar en el orden siguiente:

Orden	Operaciones
1	potenciación y radicación
2	multiplicación y división
3	adición y substracción

Las operaciones en expresiones dentro de signos de agrupación deben simplificarse primero.

Por ejemplo:

7 + (4 – 2·3) ÷2
7 + (4 – 6) ÷2
7 + (-2) ÷2
7 + (-1)
6

- Lee informaciones en diferentes contextos a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre números reales, álgebra, geometría, finanzas y estadística.

Actividad grupal

Álgebra con baldosas

Dos expresiones dadas se dice que son expresiones algebraicas equivalentes si ambas tienen el mismo valor para determinados valores de sus variables.

¿Qué haremos?

Representaremos con materiales manipulables expresiones algebraicas equivalentes.

¿Qué necesitamos?

Hojas de papel blanco, marcadores negros, regla graduada, cartulinas de color rojo, azul, amarillo y tijeras.

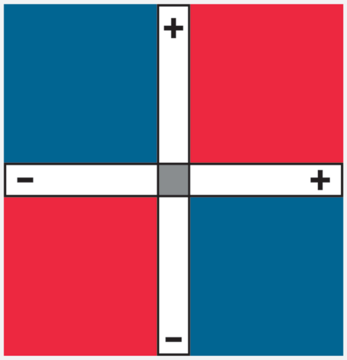
Fuente: Canva.com

¿Cómo nos organizamos?

Forma un equipo junto a dos de tus compañeros.

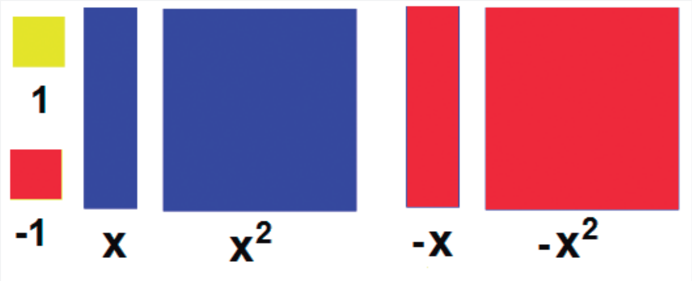
¿Cómo lo haremos?

- Primero, **construyan** sobre una hoja un tablero como se indica en la figura siguiente. El ancho de las franjas blancas horizontal y vertical debe ser de 1.5 cm.



Al multiplicar dos números negativos o positivos su resultado es un número positivo. Al multiplicar dos números, uno negativo y el otro positivo, el resultado es un número negativo.

- En las franjas con el signo «+» se colocan las variables y unidades positivas. En las franjas con el signo «-»se colocan las variables y unidades negativas. Toda unidad, variable o cuadrado de la variable que caiga en un cuadrante azul es positivo, las que caigan en un cuadrante rojo son negativas.
- Segundo, en las cartulinas recorten los cuadritos rojos y amarillos con cada lado de 1 cm. Los rectángulos rojos y azules de 1cm × 3.3cm. Los cuadrados azules y rojos deben tener lados de 3.3 cm de longitud.



Los cuadritos representan las unidades; el rectángulo azul representa una variable positiva y el rojo la variable negativa. El cuadrado grande azul representa la variable al cuadrado y el rojo su negativo.

- Tercero, realicen las siguientes tareas:
  - **Coloquen** en la franja blanca horizontal dos rectángulos azules y en la vertical un rectángulo rojo y dos cuadrados pequeños rojos. Completen el rectángulo que se forma en el cuarto cuadrante. Escriban la expresión algebraica que representa el área de ese rectángulo.
  - Usando las baldosas y el tablero hallen una expresión algebraica equivalente a: $(x + 3)(2x + 1)$.
- Presentación y socialización de las actividades
  - **Elaboren** un informe donde presenten sus soluciones a las actividades propuestas y sus respuestas a la autoevaluación y la coevaluación.

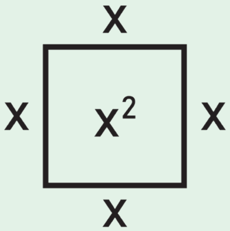
Coevaluación

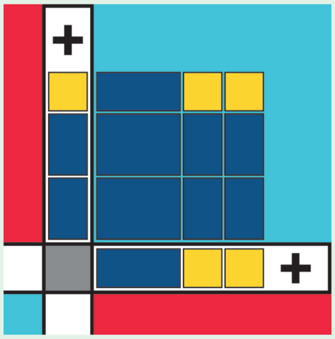
- **Escribe** una expresión algebraica y pídele a uno de tus compañeros que halle una expresión equivalente. **Comprueba** si su respuesta es correcta.

Autoevaluación

- ¿Qué aprendiste en esta actividad grupal?

El área de un cuadrado es igual a la longitud de su lado elevado al cuadrado. En un cuadrado de la x su área es igual a x^2.



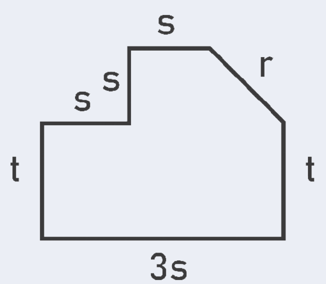


La base del rectángulo es $x + 2$ y su altura es $2x + 1$. Entonces su área es: $(x + 2)(2x + 1)$.

- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.
- Utiliza en la presentación de un informe de investigación los conocimientos sobre numeración, álgebra, geometría y estadística aplicando recursos de la tecnología.

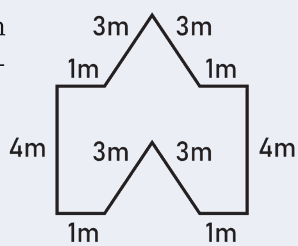
Evaluación

- **Expresa** algebraicamente cada uno de los siguientes enunciados verbales:
  - el producto de ***x*** por y sumado al producto de ***y*** por sí misma.
  - la adición de tres veces ***a*** más cinco veces ***b*** multiplicada por ***k***.
  - el perímetro de un triángulo con todos sus lados de longitudes iguales a ***s***.
  - la diferencia de ***v*** menos ***w*** multiplicada por la adición de ***w*** más ***v***.
- **Expresa** algebraicamente el perímetro de la figura.



- **Expresa** verbalmente las expresiones:
  - $(\frac{z}{18})y$
  - $a(b - 4)$
  - $\frac{x}{3x + 7y}$
  - $a + 3b - ab$
- **Identifica** los términos de las expresiones:
  - $4 \cdot 1.38 + db - (\frac{1}{3})d + 72b$
  - $xy + (-2y) - x^5$
  - $-h2 + g^2f + 4{,}502$
  - $(\frac{2}{5})jkm + jk + 10km - 6.13jm + 618$
- En cada una de las siguientes expresiones algebraicas determina sus términos semejantes.
  - $xyz - (\frac{3}{8})xy^2 + 10.37zy + y^2x + 43yz$
  - $-56mn + m + 82n + (\frac{1}{15})m + n72$
  - $109k + 6.89m + 109m - (\frac{2}{7})mk$
  - $54 + 8st - 9.76s - 4t - (\frac{63}{1{,}235})st - t$
- ¿Cuáles son los factores del término $2xy(\frac{3}{9})$
  - $2x$
  - $y(\frac{3}{9})$
  - xy
  - $2(\frac{3}{9})$
- **Halle** el valor de la expresión $x^2 + xy - y^3$ para cada uno de los valores de las variables que se indican a continuación.
  - $x = -3, y = 2$
  - $x = \frac{11}{23}, y = 2$
  - $x = 2.76, y = 5.02$
  - $x = (\frac{1}{7}), y = (\frac{7}{3})$
- **Identifica** los coeficientes de cada uno de los términos siguientes:
  - $(\frac{1}{2})5xy$
  - $(9 - 6)mnp$
  - $wzp8.743 - 10zp + wp$
- Las expresiones numéricas $1+2 \cdot 7$, $2 \cdot 8-1$ y $1+(\frac{28}{2})$ representan el número:
  - 21
  - 15
  - 17
  - 27

- **Simplifica** las siguientes expresiones combinando los términos semejantes.
    - $m^3 + mn + 4n - 2.7mn + (\frac{1}{4})m^3$
    - $-3.95q + 53t + qt - 8q - 100t$
    - $18x + 0.76xy - 9 \cdot 2x - 0.20yx + 7x$
    - $z + zxy - 2xy + 4xy - z + \sqrt{9zxy}$
- Dado que p tiene el mismo valor que q + 2, sustituye p por q + 2 en la expresión p – 2q. Simplifica combinando los términos semejantes.
- En la expresión $8b + 9.07a + b^2 - 2{,}956$
    - ¿Cuáles son sus términos?
    - ¿Cuál es el término constante?
    - ¿Cuál es el coeficiente del término b^2?
    - ¿Qué significado tiene 8b?
    - ¿Cuáles términos son semejantes?
- **Escribe** en forma de expresiones algebraicas los siguientes enunciados verbales:
    - El doble de un número cualquiera
    - La tercera parte de un número
    - Un número más la mitad de él mismo
    - La diferencia de dos números cualesquiera multiplicada por cuatro.
- María quiere cercar un jardín que tiene la forma siguiente.



Hay cercas de diferentes tipos y precios y María desea conocer los diferentes precios totales para escoger la que más se ajuste a su presupuesto. En la tabla siguiente se muestran los tipos y los respectivos precios por metro

Tipo	Precio (RD$/metro)
A	100
B	123
C	76.25

Escribe una expresión algebraica que le sirva a María para hallar el valor total de la cerca para cada precio. Luego, calcula el precio total para cada tipo de cerca.

- Usa una hoja de cálculo para hallar los valores de las siguientes expresiones algebraicas, dados los siguientes valores indicados para cada variable.
    - $4.567c - ab + 5{,}322b - (\frac{1}{8})d$

      Para, a = -320, c = $\frac{1}{7}$, d = 664
    - $53xy + 72{,}982z - 94y + 63x$

      Para, x = 15, y = 237 y z = 72
- Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes escribe un enunciado verbal correspondiente:
    - a) $b - \frac{b}{3}$ b) $4n - 1$ c) $(\frac{p+q}{5})$

En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…

Necesito consultar más información sobre estos conceptos…

El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...

Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 5

Ecuaciones

Situación de aprendizaje

En algunas estaciones del metro de Santo Domingo se encuentra la primera máquina recicladora automática creada en el país. En el 2021 fueron reciclados 266,955 envases, entre tetrabriks, latas de aluminio y botellas PET. Supongamos que fueron reciclados la misma cantidad de cada tipo de envase.

¿Cuántos envases de cada tipo fueron reciclados?

Contenido

- Introducción a las ecuaciones
- Representaciones de una ecuación
- Propiedades de las ecuaciones
- Planteamiento de ecuaciones en $\mathbb{R}$
- Resolución de problemas
- Actividad grupal
- Evaluación

Introducción a las ecuaciones

Una **ecuación:** es una igualdad que relaciona números reales y números desconocidos.

Una **incógnita:** es un número que se desconoce, por lo general se representa con una letra o un símbolo.

¿Qué elementos identifican una ecuación?

Ecuaciones

Para expresar una situación numérica en la cual desconocemos uno de los números utilizamos las letras. Por ejemplo, sabemos que 620 es un número par, pero ¿qué número multiplicado por 2 es igual a 620? Si llamamos ***n*** al número que multiplicaremos por 2, tenemos la expresión general de un número par **2n** y la situación planteada la escribimos así: **2n = 620**. Esta igualdad es una **ecuación**.

Cuando a un número real se le suma su opuesto obtenemos el cero: a+(-a)=0.

Y el 0 es el elemento neutro de la suma a+0=a

De igual forma sabemos que 627 es un número impar, la expresión general de un número impar es **2n+1**. La ecuación a plantear es: **2n + 1 = 627,** donde **n** es la **incógnita.**

Al proceso de conocer cuánto vale el número ***n***, o de despejar la incógnita, lo conocemos **como resolver la ecuación**.

Resolvamos las ecuaciones: **2n = 620** y **2n + 1 = 627**.

Para resolver una ecuación utilizamos las operaciones de los números reales, y para saber cuál operación utilizaremos identificamos cada operación aplicada a la incógnita y la inversa de dicha operación:

2n=620, ***n*** está multiplicada por 2, la operación inversa de la multiplicación es la división, entonces dividimos ambos lados de la ecuación entre 2, para mantener la igualdad:

Todo número multiplicado por 1 es igual al mismo número. 1 es el elemento identidad:

1·a=a

$$2n = 620; \frac{2n}{2} = \frac{620}{2}; \frac{2}{2} \cdot n = 310; 1 \cdot n = 310, n = 310$$

310 es el número que multiplicado por 2 es igual a 620 : 2·310 = 620.

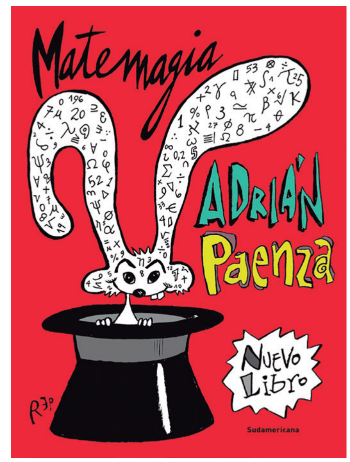
Hemos hallado el número desconocido, despejada la incógnita o resuelta la ecuación.

Gráficamente el proceso de resolución de una ecuación puede verse así:

La operación inversa de la suma es la resta	$2n + 1 = 627$	La operación inversa de la multiplicaión es la división
$1 + (-1) = 0$ $2n + 0 = 2$	-1 $2n = 626$ $\div 2$ $n = 313$	$\frac{2n}{2} = \frac{2}{2} \cdot n = n$

En matemáticas comúnmente se utilizan las últimas letras del abecedario para indicar incógnitas: x, y, z.

313 es el número que multiplicado por 2 y sumado 1 es igual a 627. De esta manera se verifica que: 2•313+1= 627.



http://www.librosmaravillosos.com/matemagia/index.html.

Adrián Paenza es un matemático argentino dedicado a la divulgación matemática. La matemagia consiste en la habilidad para adivinar números haciendo cálculos aritméticos y planteando ecuaciones.

Cálculo mental

A veces, cuando hacemos compras usamos las ecuaciones inconscientemente. Veamos por qué. Supongamos que queremos comprar 1 libra de muslos de pollo, 1 libra de tomate y 1 libra de arroz con RD$200. Sabemos que el pollo costará aproximadamente RD$120 y la libra de arroz RD$50, ¿cuánto podemos gastar en tomates?

Fuente: Freepik

Esta situación se traduce en una ecuación, donde la incógnita es el gasto en tomates; llamemos a esa incógnita x. La suma del gasto en pollo y arroz es 170, entonces la ecuación es 170 + × = 200. Ese proceso podemos hacerlo mentalmente, restándole a los RD$200 lo que vamos gastando. Así sabemos que podemos gastar RD$30 en tomates, pues:

200-170=30, luego 30 es el valor de x .

- ¿Cuál de las siguientes expresiones matemáticas es una ecuación?
  - 10+65-15 = 60
  - 3 × -2 = 13
  - 10 = 4-z
  - 2y + 1
- Mi teléfono celular tiene una capacidad de memoria de 64 GB. Las aplicaciones ocupan 31 GB, los videos 22 GB y las imágenes la mitad del espacio de los videos. ¿Cuál es el valor desconocido en esta distribución de espacio de la memoria?

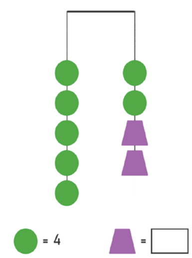
- Resuelve a partir de modelos algebraicos situaciones que se presentan en la comunidad y el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de álgebra.

Representaciones de una ecuación

¿Cómo podemos representar una ecuación?

El equilibrio de un móvil

Como ya sabemos, una ecuación es una igualdad, de manera que para mantener la igualdad toda operación que hagamos a un lado de la igualdad tenemos que hacerla también en el otro lado. Una forma de representar el equilibrio de una igualdad es con un móvil, ya que este siempre está equilibrado:

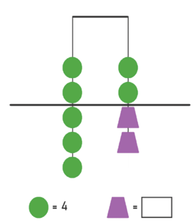


Si cada círculo verde tiene un valor de 4, entonces el lado izquierdo del móvil vale 4·5 = **20**, y en el lado derecho tenemos 4 ·2 + 2 trapecios = **8 + 2 trapecios.** De manera que, si llamamos a los trapecios T, nuestra ecuación es: **20 = 8 + 2T**

Al restar 8 en ambos lados: 20 - 8 = 8 - 8 + 2T, resulta 12 = 2T

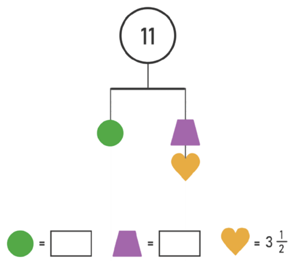
Al dividir ambos lados entre 2: $\frac{12}{2} = \frac{2T}{2}$. Por lo tanto, **T=6**

Otra forma de visualizar la solución de este móvil es la siguiente:



Como todos los círculos verdes valen lo mismo y un círculo de un lado se equilibra con un círculo del otro lado, **podemos reducir la ecuación a la parte debajo de la línea negra**: 4·3 = 2T. 12 = 2T. Siendo igualmente **T= 6**

Resuelve el siguiente móvil, nivel Puzzler:

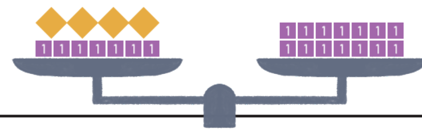
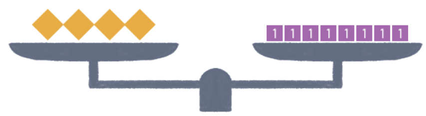
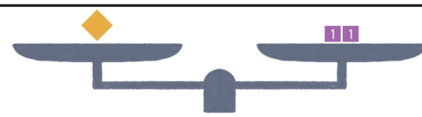


En la página de SolveMe Mobiles, puedes jugar (play) y construir (build) distintos móviles para practicar ecuaciones.
Hay tres niveles:

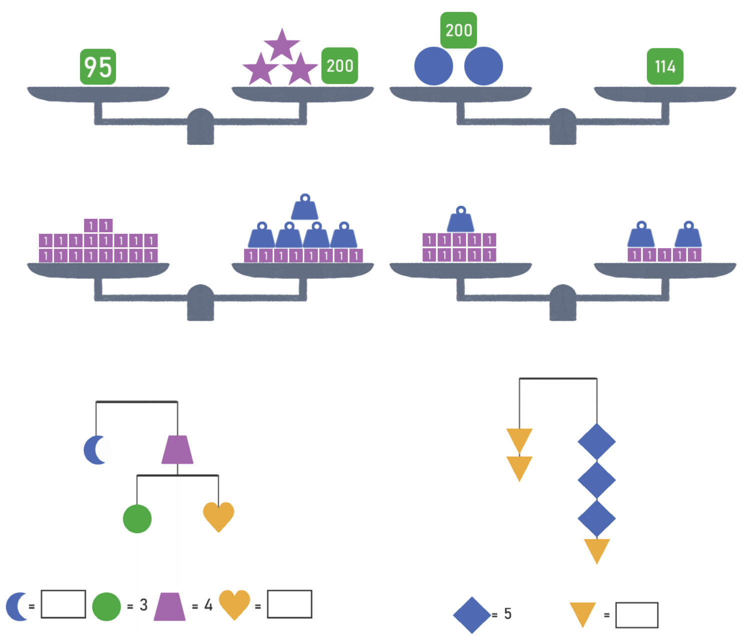
- Explorer
- Puzzler y
- Master

El equilibrio de una balanza

Otra forma de representar el equilibrio de la igualdad es con una balanza:

¿Cuánto vale el rombo (R) para que la balanza esté equilibrada? **4R+7=15**	
Quitamos 7 en ambos lados de la balanza. **4R=8**	
El rombo tiene que ser igual a 2 para que la balanza esté equilibrada. **R=2**	

- **Resuelve** las ecuaciones de las siguientes representaciones:



$7\mathbf{z} + 8 = \mathbf{2{,}401}$
$7\mathbf{z} = \mathbf{2{,}393}$
$\mathbf{z} = \mathbf{343}$

Resuelve la siguiente ecuación para que conozcas a qué edad murió Juan Pablo Duarte Díez, Prócer de la República Dominicana:

1813 + E =1876

- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre álgebra.

Propiedades de una ecuación

¿Cuáles son las propiedades de una ecuación?

Propiedades de las ecuaciones

Propiedad aditiva de la igualdad. Al sumar el mismo número a cada lado de una ecuación, la igualdad se mantiene, es decir, se obtiene una ecuación equivalente o con la misma solución.

Si $x = y$*, entonces* $x + a = y + a$

Propiedad de multiplicación de la igualdad.

Si $x = y$*, entonces* $ax = ay$

Propiedad de división de la igualdad.

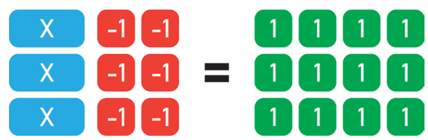
Si $x = y$ *y* $a \neq 0$*, entonces* $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$

Aquí encontrarás en el menú Algebra Tiles o álgebra de baldosas, con lo cual podrás construir y resolver tus propias ecuaciones.

https://mathigon.org/polypad

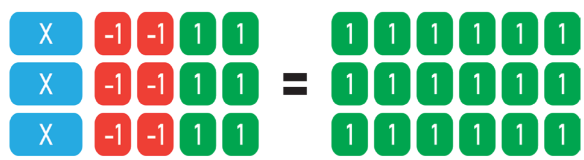
Propiedades de las ecuaciones a través del álgebra de baldosas

El álgebra de baldosas es una forma de visualizar la construcción de una ecuación. La ecuación $3x-6=12$ se construye de la siguiente forma:

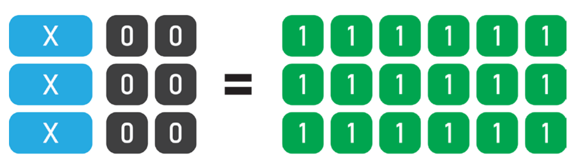


Del lado izquierdo, las baldosas azules representan a la incógnita x y las baldosas rojas representan al número entero (-1). Del lado derecho, las baldosas verdes representan al número entero 1.

Gracias a la **propiedad aditiva**, al sumar 6 baldosas verdes a ambos lados de la igualdad, esta se mantiene:



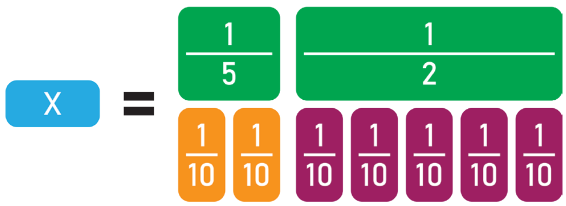
Al sumar 6 baldosas rojas con 6 baldosas verdes obtenemos 0:



Y finalmente tenemos que $x = 6$

La ecuación $x - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$ se construye así:

Luego, del lado derecho hacemos la operación entre fracciones y del lado izquierdo dejamos la × despejada:



Con lo cual obtenemos que: $x = \frac{7}{10}$

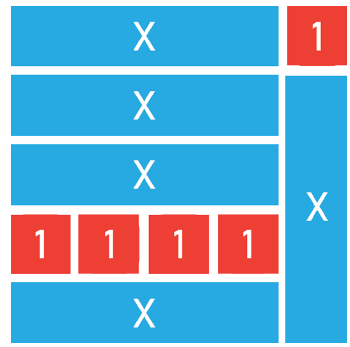
Resolver la ecuación $154 - 4y = 121 - y$

154-121=4y-y	Del lado izquierdo hacemos la operación numérica y en el lado derecho la operación algebraica.
33=3y	Aplicamos la **propiedad de la división**, dividimos entre 3 a ambos lados de la igualdad.
$\frac{33}{3} = \frac{3}{3}y$	Y sabemos que $1 \cdot y = y$
11=y	La solución es: **y=11**. Verifiquemos: 154-4 (11) =121-11; 154-44=110; 110=110✓

- **Resolver** las siguientes ecuaciones utilizando las propiedades:
  - $27y - 2 = 7$
  - $\frac{z+3}{2} = -5$
  - c. $\sqrt{8x} - 25 = \sqrt{7}x - 14$

- **Recuerda** que la operación inversa de radicación es la potenciación.

Hallar el perímetro del siguiente cuadrado:



Hallar el valor de w

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{w}} = 3$$

- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre álgebra.

Tetrabrik: es un envase que se utiliza para contener bebidas, fabricado con cartón, plástico polietileno y aluminio.

Planteamiento de ecuaciones

¿Cómo planteamos una ecuación?

Planteamiento de ecuaciones

En las situaciones cotidianas, donde hay que hallar un valor desconocido, es útil **plantear una ecuación**, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Según la Oficina para el Reordenamiento del Transporte (Opret) en 2021, en la estación María Montez del metro de Santo Domingo se recolectaron aproximadamente 4 envases de tetrabrik por usuario de la estación para ser reciclados, de los cuales 950 no pudieron reciclarse, quedando un total de 6,650 tetrabriks. ¿Cuántos usuarios aproximadamente tiene la estación?

Fuente: VisitaRepúblicaDominicana

Proceso para plantear una ecuación:

1° Identificar la incógnita.
2° Aplicar las operaciones indicadas.
3° Establecer la igualdad

En esta situación la incógnita es usuarios de la estación **U**.

Se recolectaron aproximadamente 4 envases por usuario **4U.**

950 no pudieron reciclarse **4U-950**

Quedando un total de 6,650: **4U-950=6,650**

Al resolver esta ecuación el resultado es 1,900, ya que:

4 • 1900 - 950 = 7,600 - 950 = 6,650

De manera que la cantidad aproximada de usuarios de la estación es de 1,900 personas.

Si se recolectan 5 envases por usuario y solo 800 no llegan al destino final del reciclaje, la ecuación es: 5U-800 = 6,650

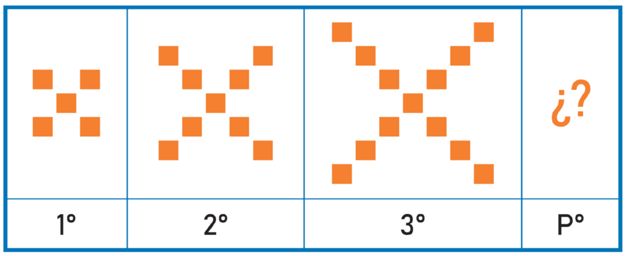
En la página de *Visual Patterns* podrás encontrar patrones visuales para plantear ecuaciones.

https://www.visualpatterns.org/

Patrones visuales

Otra situación donde es útil plantear una ecuación es para generalizar patrones. Esto se hace asociando cada uno de los términos al número de la posición en la sucesión.

En el siguiente patrón visual, ¿cuál ecuación corresponde al patrón?



En la 1° posición tenemos 5 cuadros naranja, lo cual podemos escribir como $1 + 4 \cdot 1$

En la 2° posición tenemos 9 cuadros naranja: $1+4 \cdot \mathbf{2}$

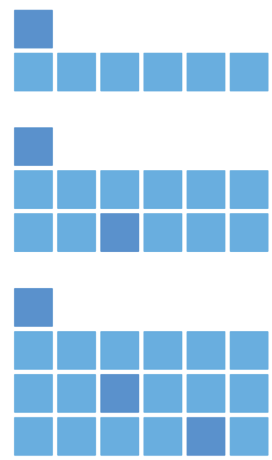
En la 3° posición tenemos 13 cuadros naranja: $1+4 \cdot \mathbf{3}$

De manera que si queremos hallar en qué posición hay 41 cuadros naranja, la ecuación correspondiente es $1+4\mathbf{P}=41$|. Donde **P** es la posición. En la posición 10 hay 41 cuadros, ya que $1+4 \cdot 10=1+40=41$.

- En el 2021, en el metro de Santo Domingo, en la estación Centro de los Héroes se reciclaron 12,411 latas de aluminio, lo cual es igual a 1,203 latas más que el doble de latas de aluminio recicladas en la estación Concepción Bona. **Calcula** cuántas latas de aluminio se reciclaron en la estación Concepción Bona.
- En el 2021, en la estación Eduardo Brito se reciclaron 56,560 botellas PET, que es igual a 12,426 botellas más que el doble de este tipo de botellas recicladas en la estación Concepción Bona. **Calcula** cuántas botellas PET se reciclaron en la estación Concepción Bona.

La Oficina para el Reordenamiento del Transporte (Opret) tiene la misión de satisfacer la necesidad de movilidad de personas y bienes, a través del desarrollo y administración de un sistema ferroviario masivo a fin de contribuir a mejorar la calidad de vida de los ciudadanos.

Si en la octava figura hay 49 cuadros azules, ¿cuál es la ecuación del patrón?

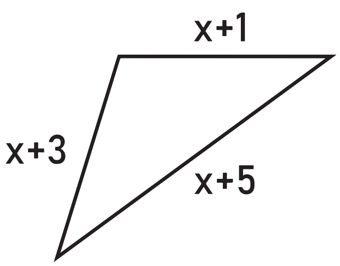


- Resuelve a partir de modelos algebraicos situaciones que se presentan en la comunidad y en el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de álgebra.

Resolución de problemas

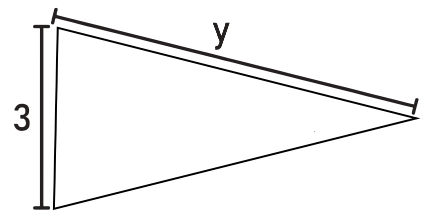
¿Cómo resolvemos problemas que involucren ecuaciones?

Halla el valor de x sabiendo que el perímetro del triángulo es 15 cm



Para resolver problemas donde hay que hallar un valor desconocido es necesario identificar la incógnita, plantear una ecuación y resolverla para hallar la solución del problema. Veamos el siguiente problema de geometría.

El perímetro de este triángulo isósceles es 14 cm, ¿cuál es la longitud del lado y?



Como el triángulo es isósceles, la suma de sus lados es: $3 + y + y = 14$. Por lo tanto, $3 + 2y = 14$, de donde $2y = 11$ y finalmente, $\mathbf{y = 5.5}$. La longitud del lado y es 5.5 cm.

Proceso para **resolver problemas** donde hay que hallar un valor desconocido:
1° Identificar la incógnita.
2° Plantear la ecuación.
3° Resolver la ecuación.
4° Verificar la solución encontrada.

Si tenemos un pendón de 768 cm y queremos construir dos chichiguas como las siguientes, ¿cuánto medirá el lado de las chichiguas?

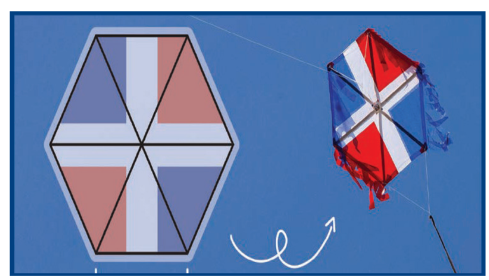
La chichigua tiene 6 lados iguales (6a) y sus diagonales miden el doble de su lado (2a), es decir, que la ecuación a plantear es:

$2(6a + 3 \cdot 2a) = 768$

$2(12a) = 768$

$24a = 768$, luego $a = 32$

El lado de las chichiguas medirá 32 centímetros.



En el 2021, en las instalaciones del Metro de Santo Domingo fueron reciclados aproximadamente 267,000 envases. De los cuales dos tercios eran botellas plásticas, un quinto latas de aluminio y el resto envases de tetrabrik.

¿Qué cantidad de envases de tetrabrik fueron reciclados?

La incógnita es la cantidad de envases de tetrabrik **(T).**

El perímetro de una figura es igual a la suma de las longitudes de cada uno de sus lados.

El perímetro de una figura geométrica plana es la longitud de su contorno.

Un triángulo isósceles tiene 2 lados iguales.

Para resolver este problema, primero hay que hallar la cantidad de botellas plásticas (**B**) y la cantidad de latas de aluminio (**A**) recicladas, para luego calcular la cantidad de envases de tetrabrik que es la incógnita del problema.

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mathbf{267{,}000} = \frac{2 \cdot 267{,}000}{3} = \mathbf{178{,}000.}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5}\mathbf{267{,}000} = \frac{267{,}000}{5} = \mathbf{53{,}400}$$

Entonces la ecuación a plantear es 267,000 = (178,000+53,400) + **T**

267,000 = 231,400 + T. La solución de esta ecuación es **T=35,600**

La cantidad de envases de tetrabrik reciclados fue 35,600.

- Un grupo de la escuela fue a la estación del metro Concepción Bona, en Santo Domingo Este, a depositar envases en la máquina recolectora para tal fin. Ana llevó un sexto del total de los envases, Boris un medio y Cayena un tercio. Si Cayena llevó 8 envases, ¿cuántos envases llevó cada uno y cuántos envases llevaron en total a la máquina?
- En el 2021, en el metro de Santo Domingo se reciclaron 266,955 envases entre tetrabriks, latas de aluminio y botellas PET. Si se reciclaron 52,562 latas de aluminio y aproximadamente 66 % de los envases reciclados fueron botellas PET. ¿Cuántos tetrabriks se reciclaron aproximadamente?

Establecer submetas es una estrategia fundamental de resolución de problemas. Esta consiste en llevar a cabo la solución por pasos, alcanzando submetas antes de llegar a la meta final.

El Metro de Santo Domingo fue inaugurado en el año 2008 y actualmente cuenta con 2 líneas y 34 estaciones en total.

- Resuelve a partir de modelos algebraicos situaciones que se presentan en la comunidad y en el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de álgebra.

Actividad grupal

Midamos nuestra huella de carbono CO_2

¿Qué haremos?

Calcular el carbono no emitido por kilogramo de material reciclado.

¿Qué necesitamos?

Cuaderno, lápiz, calculadora y datos de desechos sólidos producidos en el hogar durante una semana.

¿Cómo nos organizamos?

Nos organizamos en equipos de cinco compañeros.

¿Cómo lo haremos?

Primero: cada compañero recoge los datos de la cantidad de desechos sólidos producidos en su hogar durante una semana y los anota en la tabla siguiente:

Material (kilogramo)	Compañeros					TOTAL
	1	2	3	4	5	
Aluminio						
Cartón						
Papel						
Plástico						
Vidrio						

En esta página encontrarás la calculadora de ahorro energético de acuerdo a los kilogramos de material reciclado.

https://resicla.com.do/

Segundo: un compañero totaliza los datos.

Tercero: consultan la página de Residuos Clasificados Diversos, ingresan los datos totales de la tabla en la calculadora de la huella de carbono y responden las siguientes preguntas: ¿cuántos kilos de CO_2 no se emiten por cada kg. reciclado de; aluminio, cartón, papel, plástico y de vidrio?, ¿cuántos kilos de CO_2 no se emiten por kilogramo de cartón reciclado?, ¿cuántos kilos de CO_2 no se emiten por kilogramo de papel reciclado?, ¿cuántos kilos de CO_2 no se emiten por kilogramo de plástico reciclado?, ¿cuántos kilos de CO_2 no se emiten por kilogramo de vidrio reciclado?, ¿cuántos kilos de CO_2 no se emiten en total, si en sus hogares reciclan todos los desechos mencionados?

Cuarto: resuelvan la siguiente situación. En la casa de Juan José dejaron de emitir aproximadamente 66 kg de CO_2 y reciclaron 2 kg de aluminio, 15 kg de plástico, 25 kg de papel, cartón y vidrio. De cartón reciclaron el doble de kilos que de vidrio. ¿Cuántos kilogramos de cartón y de vidrio reciclaron?

Presentación y socialización de las actividades

Organicen la presentación de los resultados de su actividad colaborativa, incluyan las tablas, fotos de algunos desechos sólidos, las respuestas redactadas como oraciones, la ecuación y su solución. Por último, propongan otras ecuaciones utilizando la calculadora de huella de carbono.

Coevaluación

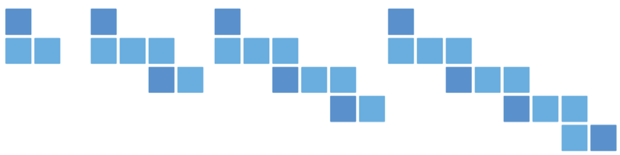
Cada miembro del grupo **describa** brevemente cómo sus compañeros hicieron los cálculos solicitados y cómo plantearon la ecuación; comenten si tuvieron alguna dificultad.

Autoevaluación

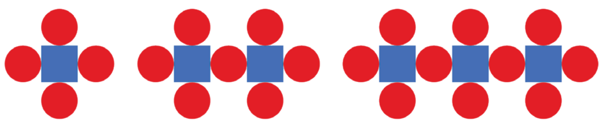
Cada miembro del equipo redacte una reflexión acerca de la importancia del reciclaje y qué debe seguir aprendiendo acerca del planteamiento y la resolución de ecuaciones.

- Expresa los resultados de un proyecto de investigación en el que se evidencie la aplicación de las expresiones algebraicas.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje las expresiones algebraicas.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios algebraicos.
- Modela, aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir del concepto algebraico.
- Aplica, a partir de un informe escrito, procedimientos algebraicos en la representación de problemas y situaciones de la comunidad.

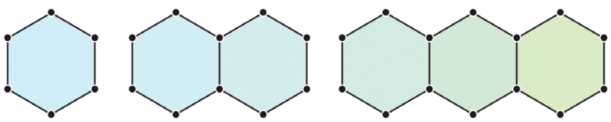
- **Plantea** las ecuaciones que cumplen con los siguientes patrones.
  - En la figura 7 hay 21 cuadros azules:



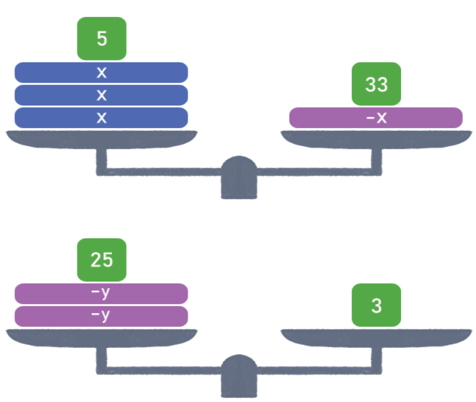
  - En la figura 10 hay 31 círculos rojos:



  - En la figura 12 hay 61 segmentos:



- **Halla** el valor de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{y}$:



- **Hallar** el valor de z:

$$2z + \sqrt{125} = \sqrt{45}$$
$$\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{48} + z$$

- En una granja hay 60 gallinas ponedoras. Un día al recoger los huevos se partieron 14, quedando un total de 166 huevos. Si cada gallina pone la misma cantidad de huevos, ¿cuántos huevos puso cada gallina?

- Sofía, Raúl y Verónica están recogiendo botellas PET en la escuela para llevarlas a la máquina recicladora. En un mes, Sofía recogió el doble que Raúl y Verónica la mitad que Raúl. En total llevaron 49 botellas a la máquina. ¿Cuántas botellas recogió Raúl?

- La estación Eduardo Brito del metro de Santo Domingo tiene 2,128 usuarios. En 2021 los envases reciclados en esta estación fueron 73,000 en total. ¿Cuántos envases se reciclaron aproximadamente por usuario si 343 de estos envases los llevó el coordinador general de la estación (quien no es usuario de la misma)?

- En 2021 en la estación María Montez del metro de Santo Domingo se reciclaron aproximadamente 44,000 envases entre latas de aluminio y botellas PET. Si la cantidad de botellas PET fue 3 veces mayor que la de latas de aluminio. ¿Cuántas latas de aluminio y cuántas botellas PET se reciclaron en la estación?

- Los envases de tetrabrik están compuestos en un 75 % de cartón renovable, 20 % de polietileno de baja densidad y 5 % de aluminio. Si se recuperaron 26,250 kg de cartón producto de la recolección de envases tetrabrik, ¿qué cantidad de polietileno y qué cantidad de aluminio se recuperó?

Utiliza la calculadora de huella de carbono de la página de Residuos Clasificados Diversos para completar la tabla:

Material (kilogramo)	1	2	3	4	5
Aluminio		5			
Cartón					
Papel					4
Plástico	7		20		
Vidrio	5	4		75	5
TOTAL CO_2 no enitido aproximadamente.	**95**	**99**	**165**	**308**	**36**

- La cantidad de aluminio que recicló la persona 1 es igual a dos tercios de su cantidad de papel, ¿cuántos kilogramos recicló de papel?
- La cantidad de papel que recicló la persona 2 es igual al doble de su cantidad de plástico, ¿cuántos kilogramos recicló de plástico?
- La cantidad de cartón que recicló la persona 3 es la mitad de su cantidad de papel, ¿cuántos kilogramos recicló de cartón?
- La cantidad de aluminio que recicló la persona 4 es igual al triple de su cantidad de plástico, ¿cuántos kilogramos recicló de plástico?
- La cantidad de plástico que recicló la persona 5 es igual a cuatro veces su cantidad de aluminio, ¿cuántos kilogramos recicló de aluminio?
- Representa gráficamente y de manera proporcionada, cuánto CO_2 se deja de emitir por cada kilogramo de los materiales de la tabla. Utiliza esta información para plantear por lo menos dos ecuaciones y resuélvelas.

- En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
- Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
- El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
- El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
- El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
- He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…
- Un tema de esta unidad sobre el que me gustaría estudiar o investigar más a fondo es...

ra precolombina
4000 - 1493

Epoca Colonial
1493 - 1800

Era de Francia
1800 - 1809

España Boba
1809 - 1821

Independencia efímera
1821 - 1822

Ocupación haitiana
1822 - 1844

Independencia Nacional
y Primera República
1844 - 1861

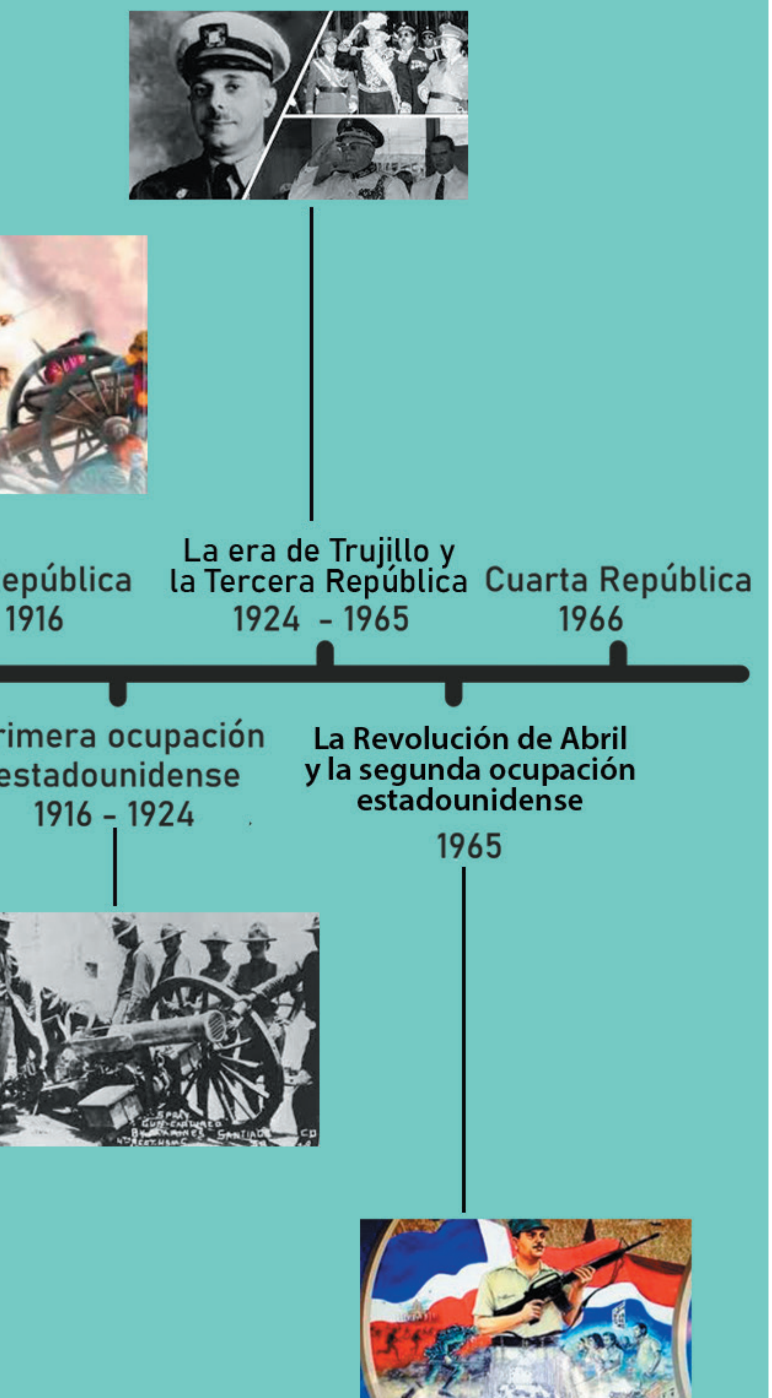
Restauración de la República
1861 - 1865

Segunda R
1865 -

Pr

Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.



Unidad 6

Desigualdades e inecuaciones

Situación de aprendizaje

La historia de la República Dominicana ha transitado un largo recorrido de distintos periodos, que fueron significativos para el país y la región. Según algunos historiadores, estos periodos pueden ser organizados de la siguiente manera: Era precolombina (4000 a. C. – 1493 d. C.), época colonial (1493 d. C.–1800 d. C.), era de Francia (1800 d. C.–1809 d. C.), España Boba (1809 d. C.–1821 d. C.), Independencia Efímera (1821 d. C.–1822 d. C.), ocupación haitiana (1822 d. C.–1844 d. C.), Independencia Nacional y Primera República (1844 d. C.–1861 d. C.), periodo de la Restauración de la República (1861 d. C.–1865 d. C.), Segunda República (1865 d. C.–1916 d. C.), primera ocupación estadounidense (1916 d. C.–1924 d. C.), La era de Trujillo y la Tercera República (1924 d. C.–1965 d. C.), La Revolución de Abril y la segunda ocupación estadounidense (1965 d. C.), Cuarta República (1966 d. C.– actualidad)

¿Puedes ubicar en la recta numérica cada uno de los periodos?, ¿cuáles periodos abarcan números reales negativos?, ¿cuáles periodos abarcan desde el siglo XVII al XX?

Contenido

- Desigualdades y propiedades
- Intervalos
- Operaciones con intervalos
- Inecuaciones
- Resolución de problemas
- Actividad grupal
- Evaluación

Desigualdades y propiedades

¿Qué son las desigualdades y cuáles propiedades cumplen?

Aa

La propiedad de **tricotomía:** establece que, dados dos números reales *a* y *b*, solamente es posible una de las tres posibilidades siguientes:

$a = b$
$a > b$
$a < b$

Relación de orden en $\mathbb{R}$

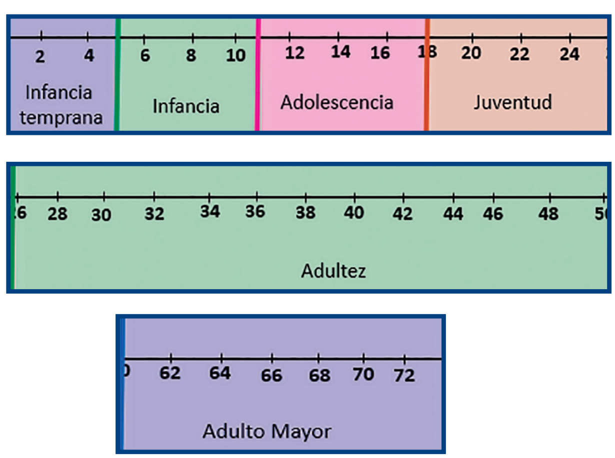
Al comparar dos números reales siempre es posible determinar cuál es mayor, cuál es menor o si estos son iguales. Este hecho se conoce como la propiedad de **tricotomía** de los reales. En particular, si sabemos que los números son distintos, entonces utilizamos los símbolos de «mayor que» (>) y de «menor que» (<) para establecer una relación de orden.

Asimismo, se pueden **definir** nuevas relaciones de orden a partir de las mencionadas anteriormente. De allí surgieron las relaciones «mayor o igual» (≥) y «menor o igual» (≤), las cuales admiten ambas posibilidades.

Las relaciones de orden «mayor que» y «menor que» están relacionadas, dado que al establecer una se puede concluir la otra. Por ejemplo, decir que «5>3« es equivalente a decir que «3<5«

Estas relaciones tienen importancia no solo en el área de las matemáticas, sino que nos permiten abordar situaciones en distintos escenarios, que pueden ser representadas en la recta numérica y a partir de allí obtener informaciones útiles. Por ejemplo, si observamos las distintas etapas del desarrollo humano, tendríamos que:

Etapa	Edad promedio	Símbolos
Primera infancia	De 0 a 5 años	$0 \leq \text{Edad} < 5$
Infancia	De 5 a 11 años	$5 \leq \text{Edad} < 11$
Adolescencia	De 11 a 18 años	$11 \leq \text{Edad} < 18$
Juventud	De 18 a 26 años	$18 \leq \text{Edad} < 26$
Adultez	De 26 a 60 años	$26 \leq \text{Edad} < 60$
Adulto mayor	De 60 años o más	$60 \leq \text{Edad}$



De este modo, se puede **representar** cada etapa del desarrollo humano utilizando las relaciones de orden.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad aditiva de la desigualdad. Al sumar un mismo número a cada lado de una desigualdad, la relación de orden se mantiene.

Si $x>y$, entonces $x+a>y+a$

Si $x<y$, entonces $x+a<y+a$

En la propiedad multiplicativa presenta qué ocurre si el número por el cual se están multiplicando ambos lados de la desigualdad es positivo o negativo ¿Qué pasa si el número es igual a cero?

Propiedad multiplicativa. Al multiplicar un mismo número positivo a cada lado de una desigualdad, la relación de orden se mantiene. En el caso de multiplicar un mismo número negativo a cada lado de una desigualdad, la relación de orden cambia.

Si $x<y$ y $a>0$, entonces $x \cdot a<y \cdot a$

Si $x>y$ y $a>0$, entonces $x \cdot a>y \cdot a$

Si $x<y$ y $a<0$, entonces $x \cdot a>y \cdot a$

Si $x>y$ y $a<0$, entonces $x \cdot a<y \cdot a$

Propiedad de la división. Al dividir por un número positivo a cada lado de una desigualdad, la relación de orden se mantiene. En el caso de dividir por un número negativo a cada lado de una desigualdad, la relación de orden cambia.

Si $x<y$ y $a>0$, entonces $\frac{x}{a}<\frac{y}{a}$

Si $x>y$ y $a>0$, entonces $\frac{x}{a}>\frac{y}{a}$

Si $x<y$ y $a<0$, entonces $\frac{x}{a}>\frac{y}{a}$

Si $x>y$ y $a<0$, entonces $\frac{x}{a}<\frac{y}{a}$

Para a difente de cero.

- **Escribe** un ejemplo de cada una de las propiedades de las desigualdades, con números reales específicos. Adicionalmente, **menciona** cuál de estas propiedades te parecen más interesantes y por qué.

- Emplea argumentos convincentes sobre ideas matemáticas referidas a la conceptualización y regularidades en patrones numéricos, así como la interpretación de expresiones algebraicas implicadas en ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades y sus propiedades.

Los **intervalos:** son subconjuntos de los números reales, los cuales se definen tomando en cuenta las relaciones de orden.

Los **intervalos acotados:** son aquellos que están limitados por dos números reales, los cuales son denominados extremos. Estos extremos pueden ser superiores o inferiores.

Los **intervalos no acotados:** son aquellos en los cuales existe un solo extremo (ya sea inferior o superior). En este caso se utilizan los símbolos de +∞ o -∞ para denotar hacia donde se extiende indefinidamente el intervalo.

Cada vez que se utilizan los símbolos de «menor o igual» o «mayor o igual» en la representación algebraica, se debe colocar corchetes en la representación simbólica.

De igual manera, cada vez que se utilizan los símbolos «menor que» o «mayor que» en la representación algebraica, debemos colocar paréntesis en la representación simbólica.

De esta manera, se indica si se incluye o no el extremo del intervalo.

Al considerar un intervalo que contemple los números reales que están entre *a* y *b* (incluyéndolos o excluyéndolos), los extremos serán *a* y *b*, amplitud será |b-a| y el punto medio se calcula a partir de la siguiente expresión $\frac{a+b}{2}$

Intervalos

¿Qué son los intervalos?

Intervalos

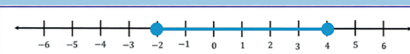
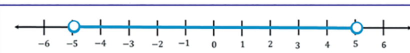
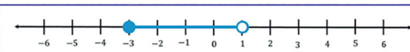
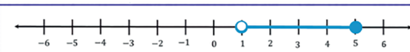
Cuando se trabaja con el conjunto de números reales, en ocasiones nos debemos referir a ciertos números que cumplen algunas condiciones especiales como, por ejemplo, los números positivos (mayores que cero) o los números negativos (menores que cero). En estos casos, podemos hacer uso de los **intervalos** para referirnos a este tipo de conjuntos.

Los intervalos son subconjuntos de los números reales que pueden ser definidos a partir de los signos de desigualdad. Estos pueden ser representados de manera **simbólica, algebraica o gráfica**.

Intervalos acotados

Dado dos números reales distintos a y b, con $a<b$, se puede definir el intervalo que contemplan todos los números reales que se encuentran entre a y b, ya sea incluyéndolos o no. Estos se denominan **intervalos acotados**.

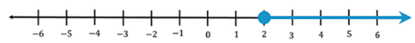
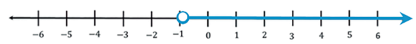
Intervalos acotados

Intervalos acotados		
Representación simbólica	**Representación algebraica**	**Representación gráfica**
$[-2,4]$	$-2 \leq x \leq 4$	
$(-5,5)$	$-5 < x < 5$	
$[-3,1)$	$-3 \leq x < 1$	
$(1,5]$	$1 < x \leq 5$	

En estos casos siempre se puede mencionar cuáles son los extremos, la distancia o amplitud y el punto medio del intervalo. Por ejemplo, en el intervalo [-1,5], los extremos serán el -1 y el 5, la amplitud será 6. Esta se obtiene calculando el valor absoluto de la diferencia de los extremos y el punto medio, el cual es la semisuma de los extremos, es decir 2.

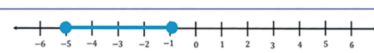
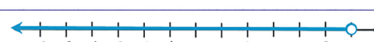
Intervalos no acotados

Existen otros tipos de intervalos, denominados **intervalos no acotados**, que son definidos ***a*** partir de un número real fijo ***a***. Así, podemos mencionar todos los números que son mayores que a, mayores o igual que ***a***, menores que ***a*** o menores o igual que ***a***. En todos estos casos se puede hacer uso del símbolo del infinito (ya sea positivo o negativo).

Intervalos no acotados		
Representación simbólica	**Representación algebraica**	**Representación gráfica**
$[2, +\infty)$	$2 \leq x$	
$(-1, +\infty)$	$-1 < x$	
$(-\infty, 4]$	$x \leq 4$	
$(-\infty, 2)$	$x < 2$	

Cuando se utilizan los símbolos de $+\infty$ o $-\infty$ se debe colocar paréntesis, ya que el infinito no es un número y, por tal motivo, no puede ser un extremo de un intervalo.

- **Completa** la siguiente tabla, en la cual se presentan intervalos representados de manera simbólica, algebraica y gráfica. Adicionalmente, clasifícalos y, en el caso de que sea posible, **determina** los extremos, la longitud y el punto medio del intervalo.

Representación simbólica	**Representación algebraica**	**Representación gráfica**
$[-4, -6)$		
	$-5 < x \leq 6$	
$(0, +\infty)$		
		
	$x \geq -3$	
		
$(-\infty, 1]$		

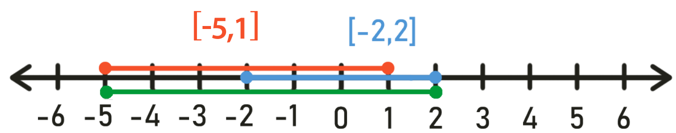
- Emplea argumentos convincentes sobre ideas matemáticas referidas a la conceptualización y regularidades en patrones numéricos, así como la interpretación de expresiones algebraicas implicadas en ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades y sus propiedades.

Operaciones con intervalos

¿Será que existen dos intervalos acotados diferentes, en los que la amplitud de la intersección sea mayor que la amplitud de la unión?

¿Cómo podemos operar con intervalos?

Dado que los intervalos son conjuntos, se pueden realizar distintas operaciones entre ellos y así obtener nuevos conjuntos. Observa la siguiente representación gráfica de los intervalos.



¿Cuáles son los números reales que pertenecen a uno u otro intervalo?, ¿cuáles son los que pertenecen a los dos intervalos de manera simultánea?, ¿cuáles son los que pertenecen a un intervalo y no al otro?

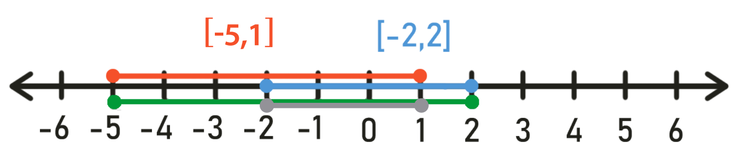
Para representar el intervalo [-5,1] se ha utilizado el color rojo: mientras que para el intervalo [-2,2] se ha utilizado el color azul.

La unión está representada con el color verde.

Operaciones con intervalos

Al igual que en los conjuntos, podemos definir la unión, la intersección y la diferencia entre intervalos.

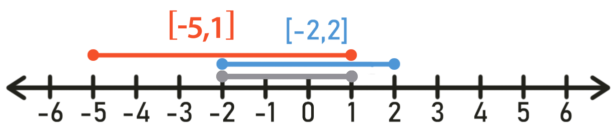
Unión de intervalos. La unión de dos intervalos se define como el conjunto formado por todos los números reales que pertenecen a un intervalo o al otro.



La unión del intervalo [-5,1] con [-2,2] será el intervalo [-5,2]. De manera simbólica, la unión de los dos intervalos se representa de la siguiente manera:

$$[-5,1]\cup[-2,2]=[-5,2]$$

Intersección de intervalos. La intersección de dos intervalos se define como el conjunto formado por todos los números reales que pertenecen al mismo tiempo a los dos intervalos.



La intersección del intervalo [-5,1] con [-2,2] será el intervalo [-2,1]. De manera simbólica, la intersección de los dos intervalos se representa de la siguiente manera:

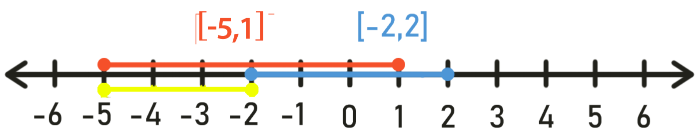
$$[-5,1] \cap [-2,2] = [-2,1]$$

Para representar el intervalo [-5,1] se ha utilizado el color rojo, mientras que para el intervalo [-2,2] se ha utilizado el color azul.

La intersección está representada con el color gris.

La diferencia entre intervalos no es conmutativa, esto quiere decir que la diferencia [-5,1]-[-2,2] es distinta a [-2,2]-[-5,1]

Diferencia entre intervalos. La diferencia de dos intervalos se define como el conjunto formado por todos los números reales que pertenecen al primer intervalo y que no pertenecen al segundo.



La diferencia del intervalo [-5,1] con [-2,2] será el intervalo [-5,-2). De manera simbólica, la diferencia de los dos intervalos se representa de la manera siguiente:

$$[-5,1]-[-2,2]=[-5,-2)$$

Para representar el intervalo [-5,1] se ha utilizado el color rojo, mientras que para el intervalo [-2,2] se ha utilizado el color azul.

La diferencia está representada con el color amarillo.

- **Efectúa** las siguientes operaciones entre intervalos y representa la solución de manera simbólica, algebraica y gráfica.

$(-4,5) \cup [-3,6]=$

$[-6,1) \cap [-3,-1]=$

$(-\infty,6) \cap (1,10]=$

$[-10,5]-(-2,9)=$

$(-2,9)-[-10,5]=$

- Emplea argumentos convincentes sobre ideas matemáticas referidas a la conceptualización y regularidades en patrones numéricos, así como la interpretación de expresiones algebraicas implicadas en ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades y sus propiedades.

Inecuaciones

Una **inecuación:** es una desigualdad en la cual se desconoce uno o más valores denominados incógnitas

¿Cómo podemos obtener la suma o resta de números reales?

Inecuaciones

Algunos problemas implican tener que encontrar números reales que cumplen una relación de desigualdad en vez de igualdades, como es el caso de las ecuaciones. Por ejemplo, si se sabe que el doble de la edad de Andrés es menos que 10 años, tenemos que la expresión algebraica asociada al enunciado será $2 \cdot x < 10$ y van a existir varios números reales que cumplirán esta condición.

$x = 1$	$2 \cdot 1 = 2 < 10$	✔
$x = 2$	$2 \cdot 2 = 4 < 10$	✔
$x = 3$	$2 \cdot 3 = 6 < 10$	✔
$x = 4$	$2 \cdot 4 = 8 < 10$	✔
$x = 5$	$2 \cdot 5 = 10 < 10$	✘

$x = 6$	$2 \cdot 6 = 12 < 10$	✘
$x = 7$	$2 \cdot 7 = 14 < 10$	✘
$x = 8$	$2 \cdot 8 = 16 < 10$	✘
$x = 9$	$2 \cdot 9 = 18 < 10$	✘
$x = 10$	$2 \cdot 10 = 20 < 10$	✘

En el caso de tener una relación como la anterior, se dice que se ha planteado una inecuación. Resolver una inecuación implica hallar todos los números reales que satisfagan una desigualdad; a este conjunto se le llama conjunto solución o la solución.

Cómo resolver una inecuación

En el siguiente vídeo podrás profundizar tus conocimientos sobre las inecuaciones y cómo resolverlas.

Para **resolver** una inecuación es necesario aplicar las propiedades de las desigualdades. Así, si deseamos resolver la inecuación $3x+4>-8$ procedemos de la siguiente manera.

$3x + 4 + (-4) > -8 + (-4)$	Aplicamos la propiedad aditiva, podemos sumar a ambos lados de la desigualdad -4.
$3x > -12$	Realizamos las operaciones numéricas.
$\frac{3x}{3} > -\frac{12}{3}$	Aplicamos la propiedad de la división. Como el 3 es un número positivo, el sentido de la desigualdad no cambia.

Así, la solución de la inecuación será $x>-4$.

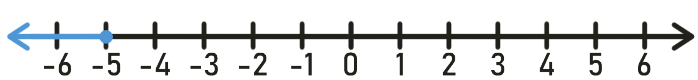
El intervalo $x>-4$ puede ser representado de manera simbólica como $(-4,+\infty)$ y gráficamente de la siguiente manera:

Un aspecto que se debe tomar en cuenta es que, al momento de aplicar la propiedad multiplicativa o de la división, si el número es menor que cero, el símbolo de la desigualdad debe cambiar. Así, si se desea resolver la siguiente inecuación $-2x-5\geq 5$, se debe proceder de la siguiente manera:

$-2x-5+5\geq 5+5$	Aplicamos la propiedad aditiva, podemos sumar a ambos lados de la desigualdad 5.
$-2x\geq 10$	Realizamos las operaciones numéricas.
$\frac{-2x}{-2}\leq\frac{10}{-2}$	Aplicamos la propiedad de la división. Como el -2 es un número negativo, el sentido de la desigualdad debe cambiar.

Así tenemos que, la solución de la inecuación será $x\leq -5$.

El intervalo $x\leq -5$ puede ser representado de manera simbólica como $(-\infty,-5]$ y gráficamente de la siguiente manera:



- **Resuelve** las siguientes inecuaciones

$7x-3\geq 11$

$-3x+12<28$

$5x+15>-45$

$9x+2\leq 5x-14$

Resuelve la siguiente inecuación:

$$\frac{5x+7}{2}>\frac{2x-4}{3}$$

- Emplea argumentos convincentes sobre ideas matemáticas referidas a la conceptualización y regularidades en patrones numéricos, así como la interpretación de expresiones algebraicas implicadas en ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades y sus propiedades.

La guinea es un ave grande y muy escandalosa que puede llegar a medir hasta unos 58cm. Se caracteriza por tener un plumaje gris negruzco con manchas blancas, su cabeza y cuello, en gran parte sin plumas, son de color azul brillante o blancuzco con protuberancias rojas.

A pesar de que esta ave es originaria del sur del Sahara, en África, es bien conocida en la República Dominicana. En el siguiente *link* del Jardín Botánico de Santiago, podrás encontrar más información sobre esta ave.

https://botanicodesantiago.com/2020/11/ave-del-mes-noviembre-2020/#:~:text=Es%20un%20ave%20grande%20y,o%20blancuzco%20con%20protuberancias%20rojas.

En el siguiente video podrás visualizar otros problemas asociados a las inecuaciones.

https://www.youtube.com/watch?v=QShhwIvpHwU

Planteamiento de inecuaciones

¿Cómo podemos obtener el producto o cociente de números reales?

Problemas de inecuaciones

Problema 1. Carmen tiene cierto número de guineas. Se le duplicó el número y Pedro le regaló una, quedando más de 19 guineas. Después se triplicó el número de guineas que había al principio y vendió 3, quedando menos de 30. ¿Cuántas guineas tenía Carmen?

Al analizar el problema, se puede observar que existen dos inecuaciones que deben ser resueltas. Si se considera x el número de guineas que tenía Carmen, entonces:

Se le duplicó el número y Pedro le regaló una quedando más de 19 guineas.	$2x + 1 > 19$
Se triplicó el número de guineas ... y vendió 3, quedando menos de 30	$3x - 3 < 30$

Resolución de inecuación 1. $2x+1>19$

$\begin{array}{rcl} 2x+1 & > & 19 \\ 2x & > & 18 \\ x & > & 9 \end{array}$	Lo que quiere decir que el número de guineas debe ser menor a 9.

Resolución de inecuación 2. $3x-3<30$

$\begin{array}{rcl} 3x-3 & < & 30 \\ 3x & < & 33 \\ x & < & 11 \end{array}$	Lo que quiere decir que el número de guineas debe ser mayor a 11.

Como el número de guineas debe ser entero, el único número que cumple esta condición es el 10. Por tanto, Carmen tenía 10 guineas.

Problema 2. En una casa hay cierto número de pollos. La inecuación que establece una relación para determinar el número de pollos es la siguiente: $2x - 3 \geq 5x - 36$

Determine la cantidad máxima de pollos.

La cantidad de pollos viene representada por la incógnita x. Así, se debe resolver la inecuación para poder determinar el número máximo de pollos.

$$2x-3\geq 5x-36$$

$$2x-5x\geq -36+3$$

$$-3x\geq -33$$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-33}{-3}$$

$$x\leq 11$$

También podemos resolver la inecuación agrupando la incógnita del otro lado de la desigualdad y el resultado no va a variar. Así:

$2x - 3 \geq 5x - 36$

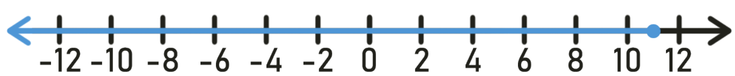
$-3 + 36 \geq 5x - 2x$

$33 \geq 3x$

$\frac{33}{3} \geq \frac{3x}{3}$

$11 \geq x$

Por lo tanto, la solución de la inecuación será $(-\infty,11]$.



De donde, el número máximo de pollos deberá ser 11.

- **Resuelve** el siguiente problema: si al doble de la edad de Ana se le restan 10 años, resulta mayor de 35; pero si a la mitad de la edad de Ana se le suman 3, el resultado es menor que 20. ¿Cuáles son las posibles edades de Ana?

Coevaluación.

Analiza los ejemplos presentados y discute con tus compañeros sobre la importancia de las inecuaciones en la resolución de problemas donde intervengan las desigualdades.

- Emplea argumentos convincentes sobre ideas matemáticas referidas a la conceptualización y regularidades en patrones numéricos, así como la interpretación de expresiones algebraicas implicadas en ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades y sus propiedades.

Actividad grupal

Historia contemporánea de República Dominicana

¿Qué haremos?

Elaboraremos un mural donde se presenten hechos importantes de la historia contemporánea de la República Dominicana. En particular, se estarán considerando los acontecimientos más destacados a nivel político y social, registrados desde el año 1966 hasta la actualidad.

¿Qué necesitamos?

Lápiz, papel, papelógrafos, cartulinas, papel crepé, marcadores, resaltadores, tijera, pega, tizas de colores, cinta adhesiva, periódicos, revistas, imágenes y cualquier otro material que pueda servir para la elaboración del mural.

¿Cómo nos organizamos?

Formaremos equipos de parejas en donde todos tienen igual responsabilidad para la ejecución de las actividades. Ambos miembros del equipo realizarán la indagación de las informaciones y aportarán las ideas para la elaboración del mural. De igual manera, deberán elaborar las respuestas a las interrogantes que se presentan.

Ejecución del proyecto

Fase 1. Búsqueda de información.

Con la finalidad de obtener las informaciones que estarán plasmadas en el mural, deben indagar sobre los distintos periodos de la historia del país que han surgido desde 1966 hasta la actualidad. Deben buscar quiénes fueron los presidentes de la República Dominicana y algunos hechos que se hayan destacado en cada uno de estos períodos.

Fase 2. Consulta de los datos indagados.

Con la información recolectada, deben preguntar a cinco adultos la veracidad de los datos recopilados. Adicionalmente, preguntarles cuáles hechos recuerdan que ocurrieron durante dichos períodos presidenciales.

Fase 3. Elaboración del mural.

Una vez recopilada toda la información, deben diseñar un mural en donde presenten, en una línea de tiempo, cada uno de los periodos presidenciales. Adicionalmente, **presentar** 3 o 4 hechos, por cada periodo, que fueron significativos para la República Dominicana.

Fase 4. Responde las preguntas.

Una vez elaborado el mural, respondan las preguntas siguientes:

- ¿cuáles hechos fueron más significativos en cada década?
- ¿cuál de los intervalos de tiempos presidenciales fueron más pro longados y cuáles fueron más cortos?

Presentación y socialización de la actividad

En el aula, se **realizará** una feria de murales en la que cada pareja deberá presentar los hechos que fueron incluidos en su mural y el porqué de su decisión para tomarlos en cuenta.

Coevaluación

Comenten cómo se distribuyeron las responsabilidades al momento de ejecutar el proyecto y qué aspecto aportó el compañero del equipo.

Autoevaluación

Reflexiona sobre el uso de los intervalos en la elaboración de la línea de tiempo. Adicionalmente, comenta cómo hiciste para responder las preguntas y qué aprendiste con esta actividad.

- Emplea argumentos convincentes sobre ideas matemáticas referidas a la conceptualización y regularidades en patrones numéricos, así como la interpretación de expresiones algebraicas implicadas en ecuaciones de primer y segundo grado, desigualdades y sus propiedades.

Evaluación

- Dadas las siguientes desigualdades, **identifica** 5 números reales que cumplan la desigualdad y 5 números reales que no la cumplan.

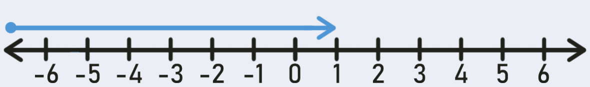
  - $x>3$
  - $x<-5$
  - $x\geq -\frac{2}{3}$
  - $x\leq \frac{1}{5}$
  - $0\leq x\leq 1$
  - $-1\leq x<0$

- **Observa** las siguientes rectas numéricas y escribe de manera simbólica y algebraica los intervalos que se han representado.

a. 

b. 

c. 

d. 

- Al multiplicar dos números naturales a y b, se obtiene un número c tal que $100 \leq c \leq 200$. Si se conoce que $5 \leq a \leq 10$, ¿cuál es el menor valor que puede tener b? y ¿cuál es el mayor valor que puede tener b?

- **Completa** en cada casilla con la representación algebraica o simbólica que corresponda. Adicionalmente, represéntalos gráficamente.

Representación Algebraica	Representación Simbólica
$-\sqrt{3} \leq x < \sqrt{3}$	
	$\left(-\infty, \frac{3}{5}\right]$
$-2 < x < -\sqrt{2}$	
	$\left(-4, \frac{7}{3}\right)$
$-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$	
	$(-e, +\infty)$
$\pi > x$	

- Establece tres diferencias entre las ecuaciones y las inecuaciones.

Ecuaciones	Inecuaciones

- **Determina** el intervalo que cumple las siguientes condiciones:

  - La amplitud del intervalo es 5, incluyen los extremos y su punto medio es -3.
  - La amplitud es 8, incluye el extremo inferior y el extremo superior es $\frac{7}{2}$ (sin incluirlo).

- No tiene extremo superior y el menor número real que pertenece al intervalo es $-\sqrt{2}$.
- Incluye todos los números no positivos.

■ **Calcula** el resultado de las siguientes operaciones con intervalos. Adicionalmente, representa la respuesta de manera algebraica, simbólica y gráfica.

- $(-1,\infty)\cap(-\infty,1]$
- $[-5,3]\cap(-1,2)$
- $(-10,8)\cap[\frac{-2}{-3}, \frac{7}{2})$
- $(-\infty,7)-[\sqrt{2},10]$
- $[-\pi,\pi]-(0,\infty)$

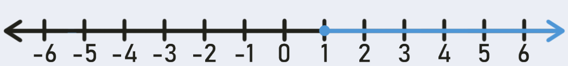
■ **Resuelve** las siguientes inecuaciones

- $3x + 4 \geq 7x - 2$
- $-8x - 4 < 9x - 12$
- $3x + \frac{3}{2} > \frac{3x}{2} - 7$
- $\frac{12x}{5} + \frac{3}{4} < \frac{20}{3} \frac{-x}{2}$

■ Cuál de las siguientes representaciones gráficas es solución de la inecuación $5x \geq 5$

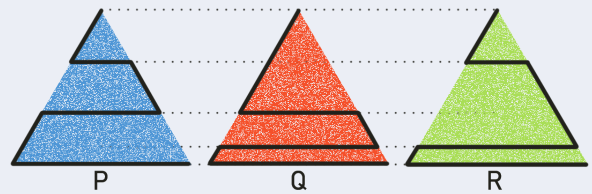
- 

- 

- 

- 

■ El contorno de parque tiene forma de triángulo equilátero. Un niño desea recorrerlo a lo largo de uno de los tres caminos indicados con líneas gruesas, desde la esquina superior hasta la esquina inferior derecha.

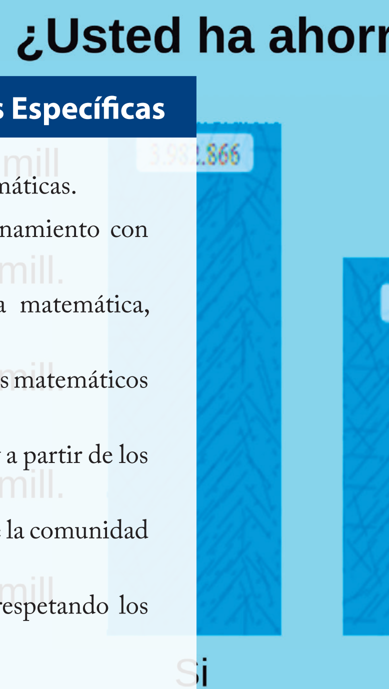


■ Las longitudes de los caminos son P, Q y R, como se muestra. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- $P<Q<R$
- $P<R<Q$
- $P<Q=R$
- $P=R<Q$
- $P=Q=R$

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
•	El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…

¿Qué medidas ha tomado para cubrir urgencias?



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 7

Planificación financiera

Situación de aprendizaje

El Ministerio de la Juventud publicó los resultados del estudio denominado «Perfil financiero de los Jóvenes Dominicanos», donde fueron considerados varios aspectos como el ahorro, los medios de pago y el crédito.

De cada 100 jóvenes, ¿cuántos recurrieron a préstamos de familiares, amigos o conocidos para cubrir una urgencia?

La pregunta acerca de ahorros e inversiones fue respondida por un total de 2,703,151, ¿qué porcentaje de esos jóvenes respondió: «no ha ahorrado o invertido»?

Contenido

- Finanzas personales
- Porcentajes
- Interés simple
- Interés compuesto
- Resolviendo problemas de finanzas
- Actividad grupal
- Evaluación

Finanzas personales

El **Banco Central** de la República Dominicana tiene, entre otras funciones, las de ejecutar políticas monetarias y cambiarias, así como emitir billetes y monedas de curso legal en el país.

https://www.bancentral.gov.do/

¿Quién costea las actividades que realizas en tu vida diaria, tales como estudiar, practicar deportes, pasear, entre otras?

Cuando se habla de finanzas personales y planificación financiera un concepto clave es el de dinero. El patrimonio de las familias, las personas y las empresas se mide por la cantidad de dinero que atesoran y manejan.

La planificación financiera tiene dos significados: el primero, se refiere a la actividad de planificar finanzas personales, familiares o empresariales; el segundo, se relaciona con una profesión, cuyo objetivo es asesorar a personas y empresas sobre cómo manejar eficaz y eficientemente su dinero.

Planificación financiera personal

La planificación financiera personal incluye un conjunto de actividades, como planificación, organización, gestión y control, relacionadas con las finanzas de una familia o de una persona.

Fuente: Pixabay

Lo primero es elaborar un presupuesto, que permita a los interesados conocer cuál es su situación económica, en términos de egresos (gastos fijos y variables) e ingresos.

Es importante tomar conciencia de nuestros gastos mensuales. Completa, en tu cuaderno, la tabla siguiente sobre tus gastos mensuales:

Rubros	Monto (RD$)
Alimentación, snacks, chips y aperitivos diversos	
Gastos escolares (lápices, fotocopias, entre otros)	
Transporte	
Recarga de teléfono	
Entretenimiento (cine, práctica deportiva, entre otros)	
Libros (técnicos, literatura, autoayuda, colorear)	
Otros (especificar)	
Total	

El otro aspecto a considerar son los ingresos mensuales y su procedencia, es decir, ¿de dónde viene el dinero que usas a diario? Es muy importante tomar conciencia de su origen, pues cubre todos los gastos que realizas durante el mes. ¿Conoces cuáles son los ingresos mensuales de tu familia? ¿Cuáles son las principales actividades económicas en tu comunidad? ¿Cuáles actividades económicas realizan los adultos en tu familia?

Otro aspecto importante de la planificación es el proponerse una meta u objetivo, a mediano o largo plazo. Por ejemplo, comprar una bicicleta, viajar en unas vacaciones o estudiar en la universidad. La planificación es un medio para alcanzar dicho fin, el cual puede alcanzarse mediante el ahorro o el préstamo.

Una vez establecida la meta, se debe concebir un plan financiero para lograrla. En esta fase, la planificación financiera juega su principal papel. Hay que considerar un método para ahorrar u otras fuentes de financiación. Es muy importante prepararse para el futuro.

El dinero fiduciario, llamado también «*fiat*», es el que está respaldado por la confianza en los bancos centrales. La palabra fiduciario tiene su origen en el vocablo latino «*fiducia*» que significa confianza. Su valor no viene dado por unas reservas físicas que lo respalden.

Alternativas al dinero fiduciario

En la planificación de las finanzas personales, se pueden tomar en cuenta alternativas al dinero fiduciario, como es el caso de los llamados metales preciosos, entre los cuales destaca el **oro**. Además, están los activos virtuales, también conocidos como **criptomonedas**.

Tanto el grupo familiar como el resto de las personas pueden decidir tener parte de sus ahorros en oro o en activos fijos, tales como **terrenos**, propiedades, entre otros. Un aspecto a tomar en cuenta es la seguridad en el resguardo de este tipo de bienes. En cuanto a las decisiones sobre el uso de activos virtuales, las personas tienen que basarse en las regulaciones legales vigentes, que son establecidas por el Banco Central de la República Dominicana; en este sentido, dichos activos están prohibidos en el país. Tienes que evitar cometer actos ilícitos en el manejo de tus finanzas personales.

En la República Dominicana, el idioma español es muy rico en vocabulario propio. Usamos palabras que no se utilizan en otros países de habla hispana y que tienen un significado muy particular. Por ejemplo, el término «**prángana**», que significa: «estar sumido en la más espantosa miseria financiera».

Fuente: https://acortar.link/S0CXLg

Coevaluación

- **Investiga** sobre los conceptos de unidad de cuenta y depósito de valor. Con tus propias palabras, escribe las definiciones de esas nociones. Luego, **compara** tus definiciones con las escritas por uno de tus compañeros; revisen las diferencias y semejanzas entre ellas, corrijan posibles errores y reelaboren lo escrito, de ser necesario, para mejorarlo.

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.
- Interpreta situaciones de la comunidad, empleando en su lenguaje los números reales, números irracionales, expresiones algebraicas, finanzas, geometría y estadística.

Porcentajes

Juan solicitó un préstamo a María por RD$1,200. Vencido el plazo acordado, Juan le pagó a María RD$1,440. ¿Qué parte del monto del préstamo le cobró María en intereses a Juan?

Una expresión numérica o algebraica puede escribirse de muchas maneras diferentes.

En muchas situaciones de la vida diaria nos encontramos con porcentajes como, por ejemplo: en descuentos en tiendas, en pagos de interés por un préstamo, aumentos de sueldo y en impuestos por adquisición de bienes y servicios.

El símbolo %, se lee «por ciento». Fue escrito por primera vez por el matemático estadounidense D. E. Smith, en 1925.

Cálculo de porcentajes

Las fracciones decimales son aquellas cuyo denominador es una potencia de 10. Un caso particular es la fracción con denominador igual a 100, referido a una cantidad dividida en 100 partes iguales.

Supongamos que recibimos un préstamo de RD$9000 y nos comprometemos a pagar el 25 por ciento mensual. ¿Cuánto tenemos que pagar el primer mes? Dividimos el monto total (el todo) entre 100 (en 100 partes iguales), esto es RD$ $\frac{9000}{100}$ = RD$90. Cancelaremos el primer mes 25 partes de cien, esto es: 25·RD$90 = RD$2250. Esto lo podemos expresar como:

$$25\ \%\ \text{de RD\$9000} = \left(\frac{25}{100}\right)\cdot\text{RD\$9000} = 0.25\cdot\text{RD\$9000} = \text{RD\$2250}.$$

El símbolo % se utiliza para indicar un porcentaje, que el número precedente se divide entre cien. 60 %, se lee sesenta por ciento e indica $\frac{60}{100}$.

Los porcentajes pueden escribirse como una fracción o como un decimal. Por ejemplo, el 25 % se puede escribir como $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ o como 0.25.

Escribe, en tu cuaderno, el 70 %, como una fracción y como un decimal.

Los porcentajes se pueden interpretar como partes de un todo, como una fracción. Por ejemplo, el 50 % de una cantidad dada es su mitad, por ejemplo: el 50 % de 4520 es:

$$\left(\frac{50}{100}\right)4250 = \left(\frac{1}{2}\right)4250 = \frac{4250}{2} = 2125.$$

Calcula, en tu cuaderno, el 25 % de 600 y el 4 % de 918.

En este sitio encontrarás las claves de redacción propuestas por la Real Academia Española, para la escritura de los porcentajes.

Al tratar el tema de los porcentajes, hay que tener en cuenta el valor básico, el porcentaje y el valor porcentual. Si conocemos solo dos de estos tres, podemos calcular el tercero. El valor básico (o base) es la cantidad que asumimos como el todo o el 100 %. ¿De qué número es 60 su 25 %?, en otras palabras, ¿cuál es el valor básico? En este caso, tenemos que 60 es una cuarta parte del valor básico, entonces, el número que buscamos es: $4 \cdot 60 = 240$. Se tiene que 60 es el 25 % de 240. ¿Qué porcentaje de 1250 es 625? ¿Cuál es el 30 % de 150?

Variación del valor del dinero

El valor del dinero cambia en el tiempo. Una cantidad depositada en un banco se incrementa periódicamente, igualmente sucede con una deuda. Esa variación del dinero en el tiempo suele calcularse porcentualmente.

Supongamos que una persona tiene una deuda de RD$3500 y tiene que pagar 8 % de esa deuda, mensualmente. ¿En cuánto se ha incrementado su deuda pasados 10 meses?

Períodos de capitalización

La tasa de interés sobre un determinado capital se calcula periódicamente, entre unas fechas determinadas o períodos. Por ejemplo, si el período es mensual, para un capital depositado el 23 de marzo, el interés se calculará 30 días después de esa fecha. Este tiempo se llama período de capitalización. Por lo general, la capitalización se determina por el número de meses al año, en que se abonan los intereses al capital.

- Un teléfono celular está a la venta por RD$19000, incluyendo el Itbis. Hallar:
  - El precio del teléfono, sin el impuesto.
  - El monto a pagar por concepto de impuesto.

El 20 % de un número dado se calcula dividiendo ese número por 5, ejemplo: 20 % de 470, es $\frac{470}{5} = 94$.

El 25 % de un número dado se calcula dividiendo ese número por 4, ejemplo: 25 % de 160, es $\frac{160}{4} = 40$.

El 50 % de un número dado se calcula dividiendo ese número por 2, ejemplo: 50 % de 726, es 726/2 = 363.

Hay varias maneras de calcular el valor porcentual de un número, con una calculadora. Si la misma no tiene tecla %, para calcular el 20 % de 230 se usa una de estas dos secuencias de teclas:

.2 $\boxed{\times}$ 230 $\boxed{=}$

20 $\boxed{\div}$ 100 $\boxed{\times}$ 230 $\boxed{=}$

Si la calculadora tiene tecla %, se usa una de las dos secuencias de teclas:

230 $\boxed{\times}$ 20 $\boxed{\%}$ $\boxed{=}$

230 $\boxed{\times}$ 20 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\%}$

- Toma decisiones lógicas, a partir del análisis sobre situaciones del entorno, en donde se apliquen los principios de números reales, números irracionales, algebraicos, finanzas, geometría y estadística, para su resolución.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

El tema del interés y la usura es tratado en muchas religiones, desde la perspectiva ética y moral.

Cristianismo, Éxodo 22:25: «Si prestas dinero a mi pueblo, a los pobres entre vosotros, no serás usurero con él; no le cobrarás interés».

Islamismo, Corán 3:130: «No se beneficien de la usura duplicando y multiplicando los intereses, y tengan temor de Dios, pues solo así tendrán éxito.»

Judaísmo, Torah. Deuteronomio 23:19: «No cobrarás interés a tu hermano: interés sobre dinero, alimento, o cualquier cosa que pueda ser prestado a interés.»

Hinduismo, Leyes de Manu (200 A.C.): «No puede ser cobrado un interés estipulado más allá de la tasa legal; esto es lo que se denomina forma usuraria de préstamo.»

Interés simple

Luisa compró un vestido en oferta, con un 50 % de descuento. ¿Qué porción del precio regular del vestido ahorró Luisa?

En nuestra cultura, cuando se recibe un préstamo se asume que se debe pagar la cantidad recibida, más un monto adicional, el cual se acuerda previamente y recibe el nombre de *interés*.

La *tasa de interés* es la cantidad a pagar por cada 100 pesos, recibidos en préstamo. La tasa de interés se expresa en porcentajes. Todo préstamo se recibe por un tiempo determinado, el cual se denomina *plazo*; por lo general, este se considera anual, aunque se pueden determinar plazos menores. La cantidad recibida en préstamo se denomina *capital inicial*.

Supongamos que recibimos un préstamo de RD$6500 y nos comprometemos a pagar un 10 % de interés, por un plazo de un año. ¿Cuánto dinero en interés tenemos que pagar en este período? Acordamos pagar 10 pesos por cada 100 pesos recibidos en préstamo, esto es:

$$\left(\frac{10}{100}\right)\text{RD\$}6500 = 10\left(\text{RD\$}\frac{6500}{100}\right) = 10\text{RD\$}65 = \text{RD\$}650.$$

Al final del año tenemos que pagar en intereses RD$650. ¿Cuánto sería el interés, si el plazo fuera de dos años? ¿Tres años? ¿Cuatro años? Completa, en tu cuaderno, la tabla siguiente.

Año	Interés acumulado	Monto al final del año
1	650	6,500 + 650
2	650 + 650 = 2·650	(6,500 + 650) + 650 = 6,500 + 2·650
3	2·650 + 650 = 3·650	(6,500 + 2·650) + 650 = 6,500 + 3·650
4		
5		
6		

Calcula el monto para el período 12, sin calcular los montos de los períodos del 7 al 11. Identifica el patrón que genera la sucesión de intereses, para cada período. ¿Cuál será el interés en un año cualquiera n? Estudiamos patrones de este tipo, en los que se suma a cada término anterior una cantidad constante llamada diferencia.

Este tipo de interés que se calcula sobre el capital inicial, considerado como constante, es denominado *interés simple*. El interés acumulado se calcula, simplemente, sumando los intereses anteriores.

Tratemos de hallar una fórmula general para calcular el interés simple para un cierto período de capitalización y el monto. Supongamos que tenemos un capital inicial *C* a una tasa de interés *i*. Calculamos el interés en cada periodo y el monto al final del mismo. **Completa**, en tu cuaderno, la tabla siguiente.

Período	Capital inicial	Interés	Interés acumulado	Monto
1	C	C·i	C·i	C + C·i = C(1 + i)
2	C(1 + i)	C·i	C·i + C·i = 2C·i	(C + C·i) + C·i = C + (C·i + C·i) = C + 2 C·i = C(1 + 2i)
3	C(1 + 2i)	C·i	2 C·i + C·i 3C·i	
4				
5				

Una vez completada la tabla anterior, podemos deducir la siguiente fórmula para calcular el interés, al final de un plazo dado.

$$I = n \cdot C \cdot i$$

donde *I* es el interés, *C* el capital inicial, *n* el plazo e *i* la tasa de interés. Para el monto *M* se puede deducir la siguiente fórmula:

$$M = C(1 + ni)$$

Un grupo de estudiantes pidió un préstamo para financiar un viaje a por un encuentro deportivo que se realizará en otra provincia. El monto del préstamo es de RD$55000. Una entidad A ofrece el préstamo para pagarlo en dos años, a una tasa de interés del 15 % anual. Una entidad B ofrece el mismo monto, pagadero a tres años al 10 % anual. ¿Cuál de las dos entidades ofrece las mejores condiciones?

Las sucesiones aritméticas son generadas por el «patrón sumar el número d» al término precedente.

La tasa de interés se expresa en porcentajes, es decir, mediante un número seguido del símbolo %. Para realizar cálculos, la tasa de interés tiene que ser expresada como una fracción o como un número decimal. Por ejemplo, una tasa del 15 %, para realizar cálculos con ella es necesario convertir en fracción dividiendo por 100: 15/100 = 3/20, no se escribe el símbolo %, o como decimal: $\frac{15}{100} = 0.15$.

Entonces, se tiene que: i = 15 %

$= \frac{3}{20} = 0.15$.

- Toma decisiones lógicas, a partir del análisis sobre situaciones del entorno, en las que se apliquen los principios de números reales, números irracionales, algebraicos, finanzas, geometría y estadística, para su resolución.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso, referido a una situación algebraica, financiera, geométrica y estadística.

Interés compuesto

Uno de nuestros refranes populares es: «No hay deuda que no se pague ni plazo que no se cumpla». ¿Cómo interpretas este proverbio? Consulta sobre su significado con algunas personas adultas. ¿Coincide tu opinión con la de ellos?

Las sucesiones cuyos términos se calculan multiplicando el término anterior por un número constante, llamado **razón,** se denominan **sucesiones geométricas.**

Al momento de negociar un préstamo o ahorrar, hay que tener en cuenta unos datos importantes, como la cantidad de dinero solicitado en préstamo o disponible para ahorrar, la tasa de interés y el plazo de duración del préstamo o del depósito. En toda transacción financiera, el interés al final del período acordado se puede calcular mediante la fórmula: I = M – C.

Donde I es el interés, M es el monto y C es el capital. ¿Cuál es el interés cobrado en una transacción de un capital de RD$35,720 y un monto final de RD$48,720?

La magnitud del monto, al final del plazo, depende de la tasa de interés y de su tipo. Se denomina interés compuesto, cuando el interés se calcula en cada período sobre el capital inicial, más el interés del período anterior. Por ejemplo, supongamos que tenemos un préstamo de RD$20,000, a una tasa del 10 %, por 5 años. Completa, en tu cuaderno, la tabla siguiente:

Período	Capital inicial	Interés acumulado	Monto compuesto
1	20,000	20,000(0.10)	20,000 + 20,000(0.10)
2	22,000	(22,000)(0.10) = 2,200	
3	24,200	(24,200)(0,10) = 2,420	
4			
5			

Determina el patrón que genera la sucesión, cuyos términos son los intereses acumulados. Halla el patrón que genera la sucesión de montos.

Consideremos ahora el caso general con un capital C, una tasa de interés compuesto *i* y un período *n*. Siguiendo un razonamiento similar al usado anteriormente, completa la tabla siguiente, en tu cuaderno.

Período	Capital inicial	Interés	Monto compuesto
1	C	Ci	$C + Ci = C(1 + i)$
2	$C(1 + i)$	$C(1 + i)i$	$C(1 + i) + C(1 + i)i =$ $C[(1 + i) + (1 + i)i] =$ $C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$		
4			
n			

Finalmente, el monto se puede calcular mediante la fórmula:

$$M = C\,(1 + i)^n$$

Dado un crédito por RD$15,600, a una tasa de interés compuesto del 10 %, por un plazo de tres años. ¿Qué monto hay que pagar finalmente?

Por la información dada, sabemos que se trata de un problema de interés compuesto y se aplica la fórmula definida arriba. Conocemos C = RD$15,600, i = 10 % y n = 3. La tasa de interés es anual, convertimos i en un número decimal: $i = \frac{10}{100} = 0.10$. Sustituimos esos valores en la fórmula.

$$M = RD\$15{,}600\,(1 + 0.10)^3 = RD\$15{,}600\,(1.10)^3$$

$$= RD\$15{,}600\,(1.331) = RD\$20{,}763.36$$

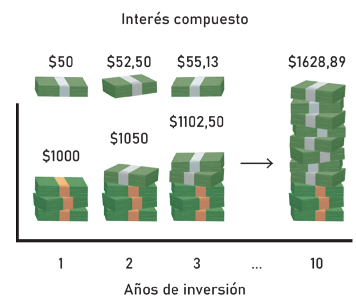
El monto total a pagar, al final del plazo, es de RD$20,763.6.

Resuelve y comprueba tu respuesta

- La familia de María necesita un crédito por RD$39,000, para gastos imprevistos. Tiene dos opciones, A: un crédito a interés compuesto, con una tasa del 10 %, por un plazo de cuatro años. B: un crédito a interés simple, con una tasa del 15 %, por el mismo plazo.

  Respuesta: La mejor opción es la B, porque se paga menos interés al final del plazo.

Para los cálculos, hay que transformar el porcentaje en un número decimal o una fracción.



Luego de 1 año

$I_1 = C \cdot i$

$C_1 = C + C \cdot i = \underbrace{C\,(1 + i)}_{}{}^1$

Luego de 2 años

$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = \underbrace{C\,(1 + i)}_{} + C\,(1 + i)\,i$

$= C\,(1 + i)\,(1 + i)\,i$

$= \underbrace{C\,(1 + i)^2}_{}$

- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en la que se apliquen los principios de números reales, números irracionales, algebraicos, finanzas, geometría y estadística para su resolución.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación, algebraica, financiera, geométrica y estadística.

Resolviendo problemas de finanzas

Pedro dice que, para resolver un problema, lo primero por hacer es identificar los datos. ¿Qué opinas de esta afirmación de Pedro?

En la resolución de problemas es recomendable proceder de manera ordenada, trazando un plan. **Primer paso**, leer el enunciado del problema y comprenderlo. La comprensión del mismo incluye identificar los conceptos y procedimientos matemáticos necesarios para resolverlo. Lee los dos problemas siguientes:

- Manuel quiere cercar un terreno rectangular con un material que venden por metros completos. La propiedad tiene dos lados de 4.3m y dos lados de 3m. ¿Cuántos metros de material debe comprar Manuel? ¿Cuántos metros de material le sobran?
- Ana ahorró RD$3450 y los depositó en un banco, que paga 8 % de interés anual. Ella se propone mantener esa cantidad de dinero en el banco, por cuatro años. ¿Cuánto dinero tendría Ana ahorrado al cumplirse ese plazo?

Identifica,cuál de los dos problemas se puede resolver con los conceptos y procedimientos estudiados en esta unidad.

El primero es un problema de geometría, mientras que el segundo es de finanzas personales. Por tanto, este último se puede resolver con lo aprendido en esta unidad.

En **el segundo paso,** se identificará la o las incógnitas, es decir, lo que se desea hallar y las conexiones entre lo conocido y la incógnita. Este paso es muy importante, ya que permitirá saber si existe una fórmula que sirva para resolver el problema, como, por ejemplo: la fórmula del interés simple. Estos dos pasos forman parte del plan para resolver el problema.

Para comprender una fórmula y su uso, es necesario identificar cada uno de los elementos que la componen. Ella, está formada por variables y puede tener también constantes y parámetros. Por ejemplo, en la fórmula para calcular el producto (P) de un porcentaje (p) de una base (n) se usa la fórmula:

P = (p/100)n, donde el 100 es una constante y P, p y n son variables.

Uso de fórmulas

En matemáticas, contamos con varias fórmulas que permiten resolver muchos problemas. Muy conocidas son las utilizadas para calcular áreas de figuras geométricas y volúmenes de sólidos. En esta unidad hemos deducido dos procedimientos para calcular el interés simple y el interés compuesto. Las fórmulas permiten hallar el valor de una de las variables, dados los valores de las otras variables que la componen.

Dada la fórmula para calcular el interés simple, podemos calcular el capital C si conocemos la tasa de interés i, el interés I y el plazo n. Supongamos un interés de RD$250, calculado con una tasa de interés del 20 %, por un plazo de 1 año y queremos deducir el capital C. Si sustituimos los valores dados en la fórmula del interés simple, obtenemos:

$$\text{RD\$}250 = (1)C(0.20);\ \ \text{RD\$}250 = (0.20)C;\ \ C = \text{RD\$}\,\frac{250}{0.2};$$

$$C = \text{RD\$}1{,}250.$$

Entonces, se tiene que el capital inicial es de RD$1,250.

Para **hallar** el valor de una variable desconocida en una fórmula, conocidas las otras variables, se sustituyen todos los valores dados de estas variables y luego se despeja la variable desconocida.

Comprobación de resultados

Una vez que hallamos un resultado, el cual responde la pregunta planteada en el problema, hay que comprobar si realmente se ajusta a lo exigido. Por ejemplo, supongamos que estamos resolviendo un problema sobre las edades de unas personas y obtenemos como resultado que una de ellas tiene 259 años, resulta evidente que hemos cometido algún error en los cálculos. Entonces, es necesario revisar el procedimiento ejecutado, para detectar el error y corregirlo.

- ¿Qué monto se obtiene de una inversión de RD$275,000, a una tasa de interés simple del 3.5 %, por un plazo de año y medio?

- Resuelve un problema del contexto, en el que se apliquen los conocimientos de álgebra, finanzas, geometría y estadística.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas, a partir de los conocimientos sobre números reales, álgebra, geometría, finanzas y estadística.

Actividad grupal

Interés compuesto versus interés simple

Hoja de cálculo: es un programa que opera con tablas formadas por filas y columnas de celdas, que contienen información numérica y fórmulas o texto, y las presenta en una pantalla.

Fuente: https://dle.rae.es/hoja

Los paquetes de oficina son un conjunto de programas informáticos que permiten realizar muchas tareas en el trabajo de oficina, como la redacción de documentos y el registro de datos. Estos incluyen una hoja de cálculo.

En este sitio se encuentra un curso sobre cómo hacer gráficos con una hoja de cálculo.

https://informaticapc.com/openoffice-calc/graficos.php

¿Qué haremos?

Comparar el comportamiento del interés simple y el interés compuesto en un plazo determinado para un capital dado, usando una **hoja de cálculo**, con el fin de asesorar a una pequeña empresa en tu comunidad, sobre cuál tipo de interés es más ventajoso para un crédito.

¿Qué necesitamos?

Una computadora con una hoja de cálculo instalada.

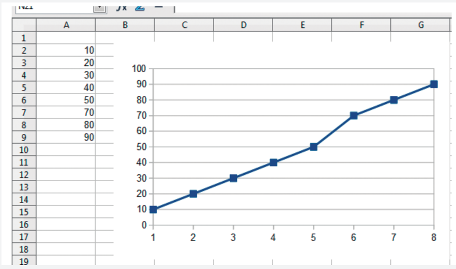
¿Cómo nos organizamos?

Forma un equipo con dos de tus compañeros. De manera alternada, uno de los miembros del equipo tomará notas del trabajo que están realizando. Las mismas serán usadas por el grupo para redactar el informe final y una presentación para toda la clase.

¿Cómo lo haremos?

En esta actividad se aprovechará la herramienta de graficación de una hoja de cálculo, para comparar la evolución del interés simple y del interés compuesto de un capital inicial, dado en un plazo indicado.

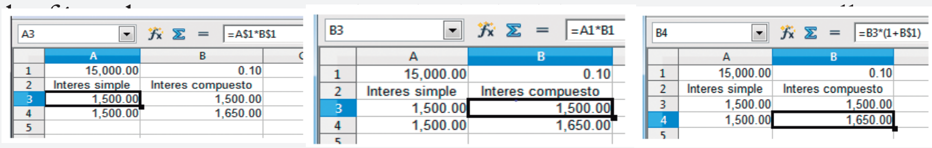
Primero, **verifiquen** que la computadora a utilizar tiene instalado un paquete de oficina con una hoja de cálculo. Si no está, descarguen uno de esos paquetes de software libre. Verifiquen que el sitio web sea el sitio oficial del programa seleccionado.



Segundo, **indaguen** sobre cómo realizar una gráfica en la hoja de cálculo, a partir de un conjunto de datos. Hagan un ejercicio de graficación, con un conjunto de datos cualquiera.

Tercero, **elijan** un capital inicial cualquiera. Escriban esa cantidad en la celda **A1** en la hoja de cálculo. Escojan una tasa de interés y escriban ese dato en la celda **B1**. Hagan los cálculos para un plazo de 8 años.

Cuarto , en la columna A, a partir de la celda A3, escriban la fórmula para calcular el interés simple y rellenen hacia abajo hasta la celda A10, dado que el plazo es de 8 años. En la columna B, en la celda B3 escriban



Quinto, **grafiquen** ambas columnas de datos en una misma gráfica. Comparen el comportamiento de ambas gráficas. Elaboren sus conclusiones. ¿Qué recomendarían a la pequeña empresa?

Para escribir una fórmula dada en una hoja de cálculo se necesita asociar a cada variable en la fórmula una celda en la hoja de cálculo. Además, las fórmulas en la hoja de cálculo se escriben siempre comenzando con el signo de igualdad.

Presentación y socialización de las actividades

Al finalizar esta actividad, cada grupo debe **elaborar** un informe final y una presentación. Dos equipos serán escogidos por el profesor para presentar sus trabajos en el aula. Los grupos seleccionados deberán comparar las maneras en que realizaron sus trabajos de investigación y los resultados obtenidos.

En este sitio encontrarás una guía con ejercicios de interés simple y compuesto resueltos, utilizando una hoja de cálculo.

https://acortar.link/M7DHet

Coevaluación

Cada miembro del equipo debe **escribir** un párrafo, en donde indique las contribuciones de las otras dos personas del grupo en la realización y culminación del trabajo.

Autoevaluación

Cada uno de los miembros del equipo debe **escribir** por lo menos un párrafo (de un máximo de 8 líneas), como parte de las conclusiones del trabajo, donde exprese, ¿qué aprendió al realizar esta actividad? ¿Cuáles fueron las partes más difíciles de realizar? ¿Cómo creen que lo aprendido les puede ayudar en el futuro?

- Aplica herramientas tecnológicas para resolver una situación particular de la comunidad, utilizando numeración, álgebra, finanzas, geometría y estadística.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas, a partir de los conocimientos sobre números reales, álgebra, geometría, finanzas y estadística.

Evaluación

- **Hallar** el porcentaje de cada número, como se indica a continuación:
  - 23 % de 5,238.
  - 2.52 % de 127.
  - 120 % de 593.
- **Expresa** en decimales y como fracciones, cada uno de los porcentajes siguientes:
  - 0.73 %.
  - 46 %.
  - 3 %.
- La fórmula para calcular el interés simple I de un capital C, a una tasa de interés i, por un tiempo n es: I = nCi. Halla las fórmulas para calcular:
  - La tasa de interés, conocidos el capital, el interés y el tiempo.
  - El tiempo, conocidos el capital, el interés y la tasa de interés.
  - El capital, conocidos el tiempo, el interés y la tasa de interés.
- **Hallar** el interés de un préstamo de RD$7560 por dos años, a una tasa del 6 %.

  Juan solicitó un préstamo de RD$8600 y se comprometió a pagar RD$9500, dentro de tres meses para saldar su deuda. ¿Cuánto tiene que pagar Juan en intereses?
- María le prestó a Manuel RD$1270 y acordaron un pago adicional de RD$230, al pagar la deuda. ¿Cuánto tiene que pagarle Manuel a María en total, a la fecha de vencimiento del préstamo?
- **Explica**, cómo se interpretan las siguientes tasas de interés:
  - 3.7 % semanal.
  - 2.6 %.
- Las jugadoras de un equipo de voleibol pidieron un préstamo de RD$18,700, para pagarlo en 5 meses, a una tasa de interés simple del 36 %. ¿Cuánto tienen que pagar por concepto de interés? ¿Cuál es el monto a pagar?

- Felicia ha ahorrado en el banco RD$35,200. En la institución bancaria le pagan una tasa de interés simple del 4.5 %. Supongamos que no retiró dinero en todo el año, ¿cuánto le depositan mensualmente a Felicia en su cuenta?
- La empresa Baila Conmigo pidió un préstamo de RD$590,000, al 9 %, por 4 años, para comprar una miniván, a fin de transportar a los músicos y sus instrumentos. Halla el interés compuesto y el monto a pagar, al final del período y el valor de las cuotas mensuales.

- La compañía A La Mar invirtió RD$163,200, por un plazo de 5 años y recibió RD$19,400, por concepto de intereses simples. ¿Qué tasa de interés pagó esta inversión?

- **Representa** en porcentajes los siguientes números decimales y fracciones.

  - $\frac{1}{5}$
  - 0.30.
  - 0.075.
  - $\frac{1}{3}$

- **Escribe** en cifras acompañadas del símbolo %, los enunciados siguientes:

  - Ochenta y tres por ciento.
  - La cuarta parte del total.
  - Cinco centésimas.

- **Explica**, cuál es la diferencia entre el valor porcentual y el porcentaje.

- **Calcula,** mentalmente, el valor porcentual de cada número que se indica a continuación:

  - 20 % de 400.
  - 10 % de 275.
  - 50 % de 1234.

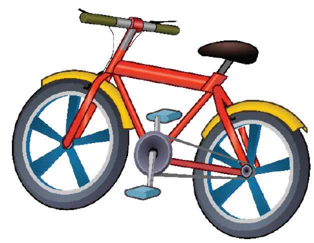
- Una persona recibe trimestralmente RD$4500, en pagos por concepto de intereses, por una cantidad de dinero ahorrada al 8 %. ¿Cuál es la cantidad de dinero depositada inicialmente por esta persona?

- Juana depositó RD$8000 en una cuenta de ahorros, que paga 7 % de interés. Juana no hizo ningún retiro ni depósito durante un plazo de 3 años.

  - ¿Cuánto dinero tendrá Juana en su cuenta, vencido ese plazo, a interés simple?
  - ¿Cuánto dinero tendrá Juana en su cuenta, vencido ese plazo, a interés compuesto?

- En una tienda venden consolas de videojuegos a crédito, pagando una cuota inicial del 15 %, del precio de la consola. Una persona quiere comprar una consola que vale RD$13,000. ¿Cuál es la cantidad de dinero que quedará debiendo a crédito?

- Una bicicleta para niños está en exhibición en una tienda a un precio de RD$5950. Manuela quiere ahorrar para comprar esa bicicleta de regalo para su hermano. Ese precio no incluye el Itbis, cuya tasa es del 18 %. ¿Cuánto tiene que ahorrar Manuela para comprar la bicicleta?

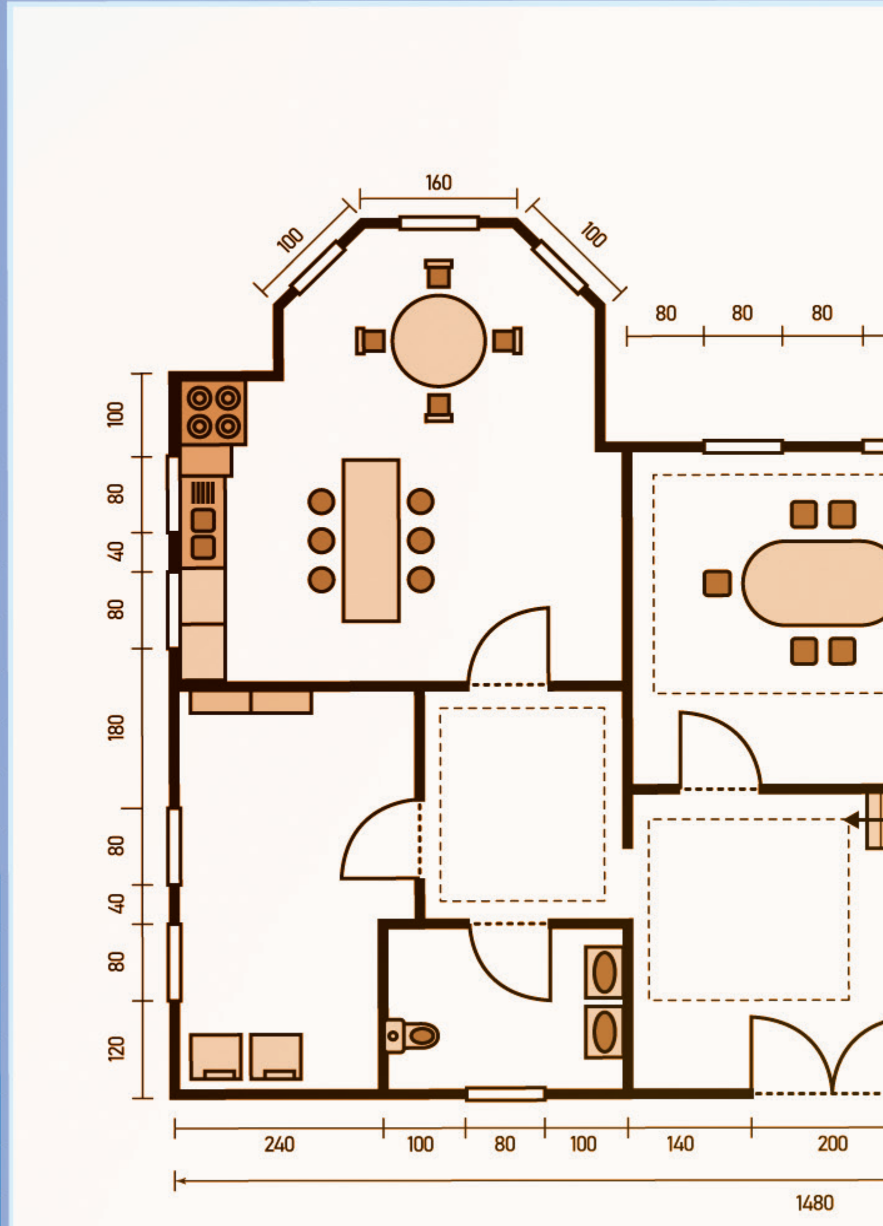


- Los dueños de una tienda de artículos deportivos aumentaron el precio de los tenis para correr, en 8 %. ¿Cuánto costaban los tenis antes del aumento, si su precio actual es de RD$4800?

- Luis tiene planes de triplicar una cantidad de dinero que tiene ahorrada. ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar si deposita sus ahorros, al 9 % de interés simple?

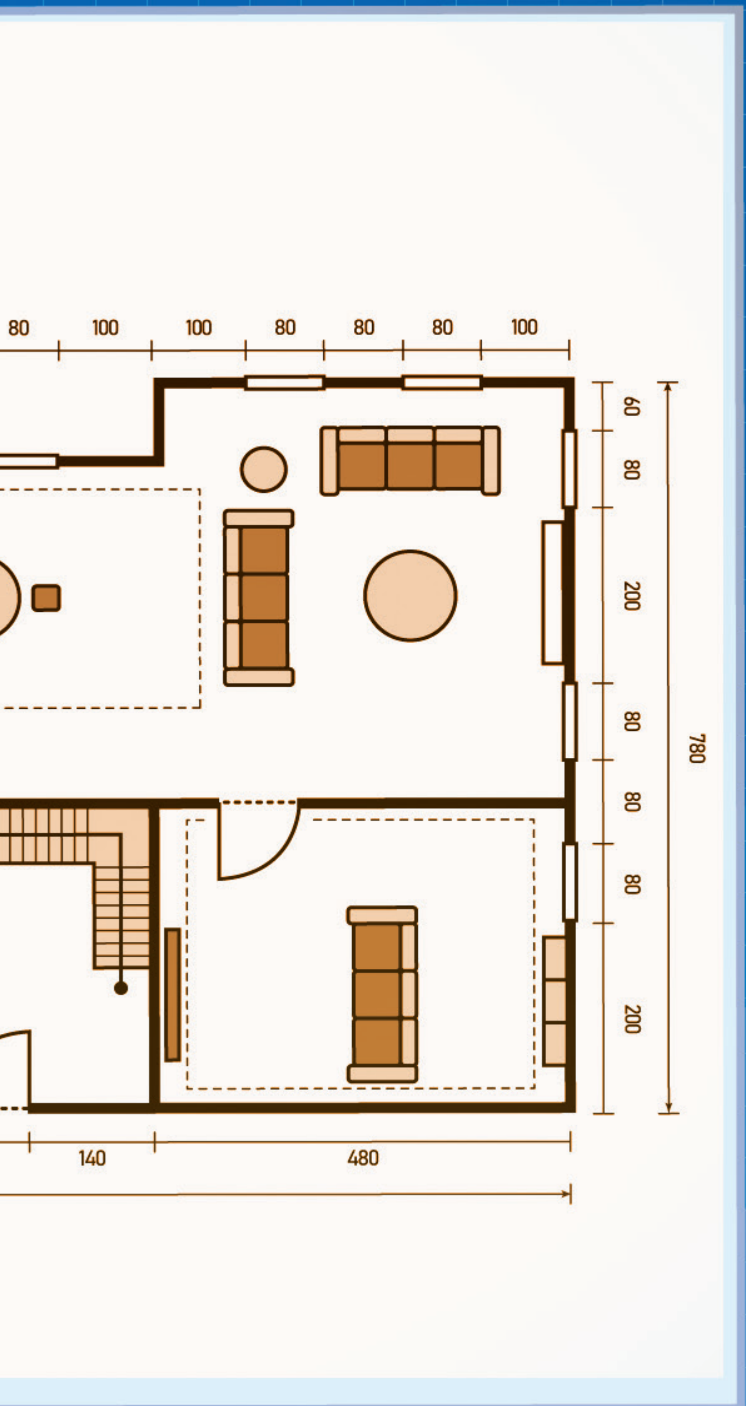
- Una empresa invirtió RD$725,000 a una tasa del 15 % capitalizable mensualmente, por un plazo de 10 meses. Hallar:

  - El monto compuesto, al final del plazo.
  - El interés compuesto obtenido.
  - La diferencia entre los montos simple y compuesto. ¿Cuál monto es el mayor?



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.



Fuente: Freepik.com

Unidad 8

Historia de la geometría

Situación de aprendizaje

¿Qué conocimientos necesita una arquitecta para diseñar el plano de una casa como el que se muestra en la imagen?

¿Qué elementos geométricos visualizas en el plano?

Contenido

- Geometría plana
- Punto, recta y plano
- Plano cartesiano
- Representación de polígonos en el plano
- Distancia entre dos puntos
- Actividad grupal
- Evaluación

Geometría plana

¿Cómo ha evolucionado la geometría a través de la historia?

Geometría significa medir la tierra. Podemos medir distancias o longitudes, cuya medida básica es el metro (m); superficies o áreas, expresadas primordialmente en metros cuadrados (m^2) y espacios o volúmenes, expresados básicamente en metros cúbicos (m^3).

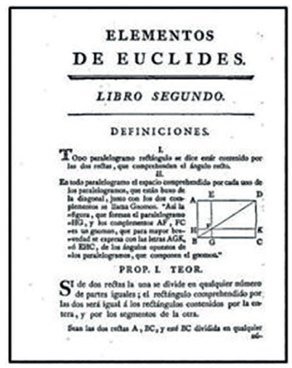
Definición, enunciado con que se define un concepto.

Postulado, proposición cuya verdad se admite sin pruebas para servir de base en razonamientos posteriores.

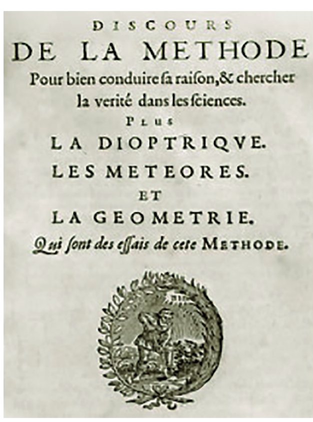
Axioma, proposición que se acepta como cierta sin demostración.

Teorema, proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas, postulados o de otras proposiciones ya demostradas.

La **geometría** es la rama de la matemática que centra su estudio en las propiedades de las líneas, los planos, los ángulos, las formas, así como en las distancias y relaciones entre ellas. Para ello es fundamental la observación de los elementos que conforman el espacio y sus propiedades, siendo la naturaleza una de sus primeras fuentes de información. Así, desde los principios de la humanidad hemos observado las estrellas y los planetas, dando lugar a la astronomía. También hemos diseñado mapas, dando lugar a la cartografía y hemos llevado a cabo construcciones. Para todo esto, se necesitan conocimientos geométricos que han resuelto problemas científicos y sociales.


ELEMENTOS
DE EUCLIDES.
LIBRO SEGUNDO.
DEFINICIONES.
I.
Todo paralelogramo rectángulo se dice estár contenido por las dos rectas, que comprehenden el ángulo recto.
II.
En todo paralelogramo el espacio comprehendido por cada uno de los paralelogramos, que están baxo de la diagonal, junto con los dos complementos se llama Gnomon. "Así la figura, que forman el paralelogramo HG, y los complementos AF, FC es un gnomon, que para mayor brevedad se expresa con las letras AGK, ó EHC, de los ángulos opuestos de los paralelogramos, que componen el gnomon."
PROP. I. TEOR.
Si de dos rectas la una se divide en qualquier número de partes iguales; el rectángulo comprehendido por las dos será igual á los rectángulos contenidos por la entera, y por los segmentos de la otra.
Sean las dos rectas A, BC, y esté BC dividida en qualquier nú-

Los conocimientos geométricos fueron sistematizándose y los métodos de demostración geométrica fueron perfeccionándose, surgiendo así los famosos *Elementos de Euclides* en el siglo IV a. C., una obra que recoge el conocimiento base para el desarrollo de la geometría, que consta de 13 libros y construye la geometría basándose en **definiciones**, **postulados** y **axiomas**, con los cuales demuestra **teoremas.**

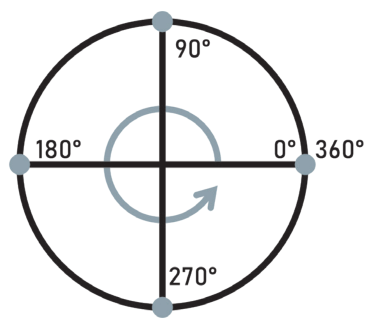

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

Otra obra famosa en relación con la geometría que estudiaremos es la de René Descartes, dedicada a la interrelación entre el álgebra y la geometría con ayuda del sistema de coordenadas. Esta obra está incluida en su famoso libro *El discurso del método*, publicado en 1637. A esta geometría se le conoce con el nombre de *geometría analítica*. Existen otras geometrías con las siguientes características:

Geometrías	Características
Geometría descriptiva	Estudia la representación de objetos tridimensionales en una superficie de dos dimensiones.
Geometría diferencial	Utilización de conceptos y métodos del cálculo diferencial.
Geometría proyectiva	Estudia las propiedades proyectivas de los objetos geométricos.

Reseña histórica de la geometría

Lugar y tiempo	Características
Babilonia hace 6,000 años	Inventaron la rueda, estudiaron la circunferencia y astronomía, estimando que un año duraba 360 días. Esto dio origen al sistema sexagesimal, por lo cual la circunferencia se divide en 360 partes.
Egipto hace 4,000 años	Agricultores que necesitaban medir la tierra, resolvieron problemas de área del triángulo isósceles, del trapecio isósceles y del círculo. Sus estudios fueron empíricos, no se basaban en un sistema lógico.
Grecia hace 2,500 años	Comienza la formalización de los conocimientos y el desarrollo del método deductivo. Se postula el teorema de Pitágoras y la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, entre otras. Estudiosos: Heródoto, Pitágoras, Tales, Platón, y Euclides, quien escribió la obra los *Elementos*.
Alemania, Rusia hace 200 años	Por hallar fallas lógicas en los *Elementos*, surge la geometría no euclidiana. Estudiosos: Lobachevsky, Riemann entre otros.



Autoevaluación

- **Escribe** un ensayo breve sobre qué crees que estudia la Geometría actualmente, qué se mide y cómo se mide.

Euclides de Megara, matemático y geómetra griego (325 a.C.- 265 a. C.)

Fuente: *Enciclopedia Biográfica en Línea*

Georg Friedrich Riemann (1826-1866), matemático alemán.
Fuente: Wikipedia

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre geometría.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje la geometría.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de la geometría para su resolución.
- Modela, aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos geométricos. Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación geométrica.

Punto, recta y plano

Un punto es una entidad indefinida, tiene posición, pero no tiene dimensión.

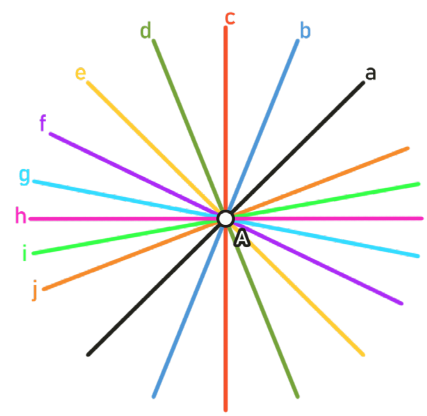
Una recta es un conjunto de puntos que forman una trayectoria que no cambia de dirección y que se prolonga al infinito en ambos sentidos.

Un plano es una superficie plana que se prolonga sin límite en todas las direcciones, no tiene dimensión.

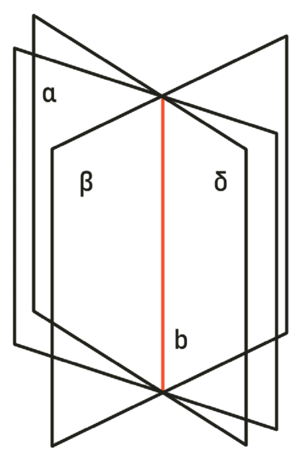
¿Cuáles son los elementos básicos de la geometría plana?

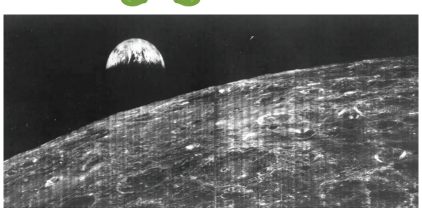
Los elementos básicos de la geometría son el punto, la recta y el plano. Veamos algunos postulados que relacionan estos elementos.

- Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Por una recta pasan infinitos planos.
- Por dos puntos pasa una única recta.
- Por una recta y un punto fuera de ella pasa un único plano.
- Por el punto **A** pasan las rectas a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, y pueden pasar infinitas rectas.



- Por la recta b pasan los planos α, β, δ y pueden pasar infinitos planos.

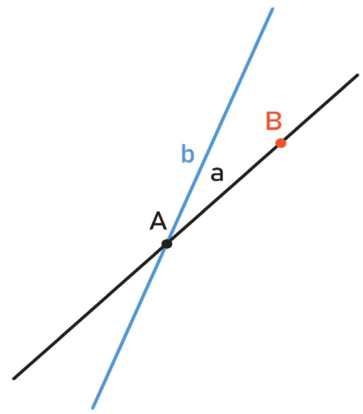




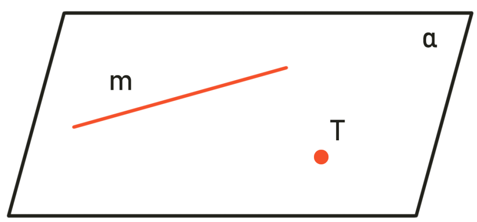
Fuente: nasa.gov

Esta fotografía, tomada el 23 de agosto de 1966 por la nave espacial Orbiter 1 de la NASA, cambió para siempre la manera en que vemos la Tierra, poniéndola en perspectiva en el espacio y mostrando para siempre que la Tierra no es plana.

- Por los puntos **A** y **B** pasa únicamente la recta **a**.



- Por la recta **m** y el punto **T** pasa únicamente el plano α

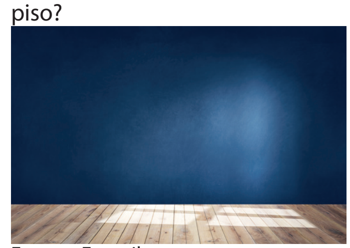


Una superficie, como una pared o un piso, nos sugiere la idea de lo que en geometría llamamos plano, pero estas son extensiones limitadas de un plano ilimitado. También llamamos plano a una representación en dos dimensiones y, a determinada escala, de un terreno (mapa), una máquina, una construcción, entre otras. Estas representaciones son limitadas, lo que las diferencia de lo que en geometría se entiende formalmente por plano.

- **Reúnete** con tres compañeros de tu clase para dibujar un plano de la escuela, donde ubiquen tres de sus puntos más importantes. Comenten los resultados.

El **Instituto Geográfico Nacional** (IGN) elabora y mantiene actualizado el mapa oficial de la República Dominicana. Un mapa es una extensión limitada de la geografía de un lugar.

¿Qué elemento geométrico te sugiere la intersección de dos paredes? ¿y de una pared y el piso?


Fuente: Freepik

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre geometría.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje la geometría.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en la, que se apliquen los principios de la geometría para su resolución.
- Modela, aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos geométricos.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación geométrica.

Plano cartesiano

El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes, el primer cuadrante se encuentra ubicado en la esquina superior derecha del plano y el resto de los cuadrantes se ordenan siguiendo el sentido contrario de las agujas del reloj.

La recta horizontal es el eje de las abscisas, o eje X.

La recta vertical es el eje de las ordenadas, o eje Y.

El punto de intersección entre el eje X y el eje Y se denomina origen, es el (0,0).

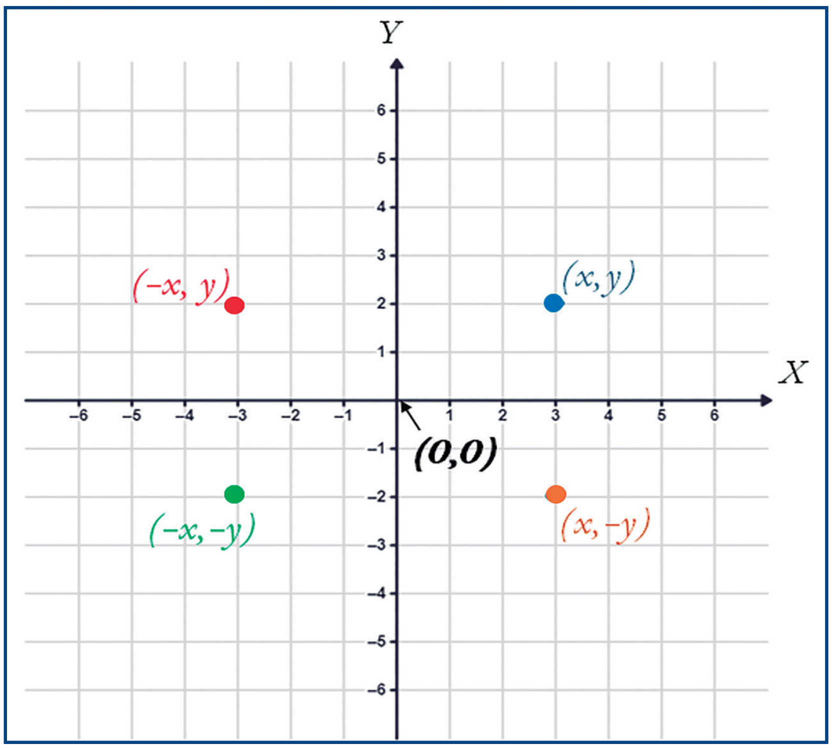
Origen de los ejes cartesianos.

En esta página conocerás la historia de cómo a René Descartes, en latín *Renatus Cartesius,* se le ocurrió la idea de la localización exacta de un punto utilizando dos rectas perpendiculares. En su honor estas coordenadas reciben el nombre de coordenadas cartesianas.

¿Cómo representamos los elementos de la geometría con exactitud?

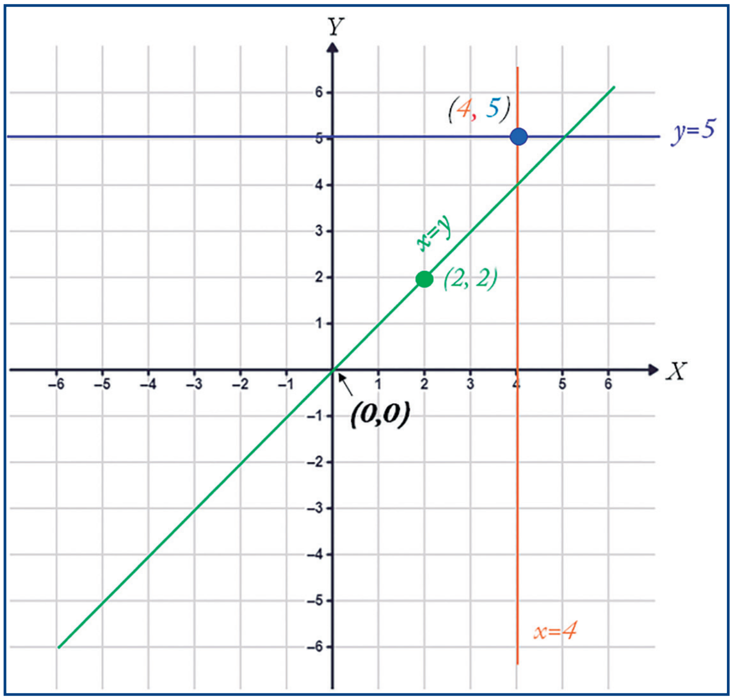
Para **representar** un punto y una recta en un plano con exactitud, utilizamos el plano cartesiano. Cada punto en el plano cartesiano tiene dos coordenadas: la primera coordenada, denominada x, ubica el punto con respecto al eje X, y la segunda coordenada, denominada Y, ubica al punto con respecto al eje Y; un punto cualquiera se denota (x, y).

Observa el signo de las coordenadas en cada cuadrante.



1°	2°	3°	4°
$x>0$ $y>0$	$x<0$ $y>0$	$x<0$ $y<0$	$x>0$ $y<0$

Por un punto en el plano cartesiano pasan infinitas rectas, particularmente pasa una recta vertical y una horizontal. Veamos cuáles son las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto (4,5).



¿Cuál será la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, -4) y (- 4,4)?

La **recta horizontal azul** se denota con la ecuación **y=5**, ya que todos sus puntos tienen coordenada y igual a 5, es decir, que se escribe de la forma (x,5).

La **recta vertical naranja** se denota con la ecuación ***x*=4**, ya que todos sus puntos tienen coordenada x igual a 4, es decir, que se escribe de la forma (4, y).

La recta que pasa por el origen y por un punto de coordenadas iguales, es decir, de la forma (a,a), como la **recta oblicua verde**, se denota con la ecuación ***x=y*** . Esta recta pasa por los puntos (0,0) y por (2,2), todos sus puntos tienen la coordenada x igual a la coordenada y. Por estos dos puntos pasa esta única recta.

- **Ubica** en cada cuadrante del plano cartesiano un punto, y traza las rectas horizontales y verticales que pasan por ese punto. Escribe las coordenadas de cada punto y las ecuaciones de cada recta.

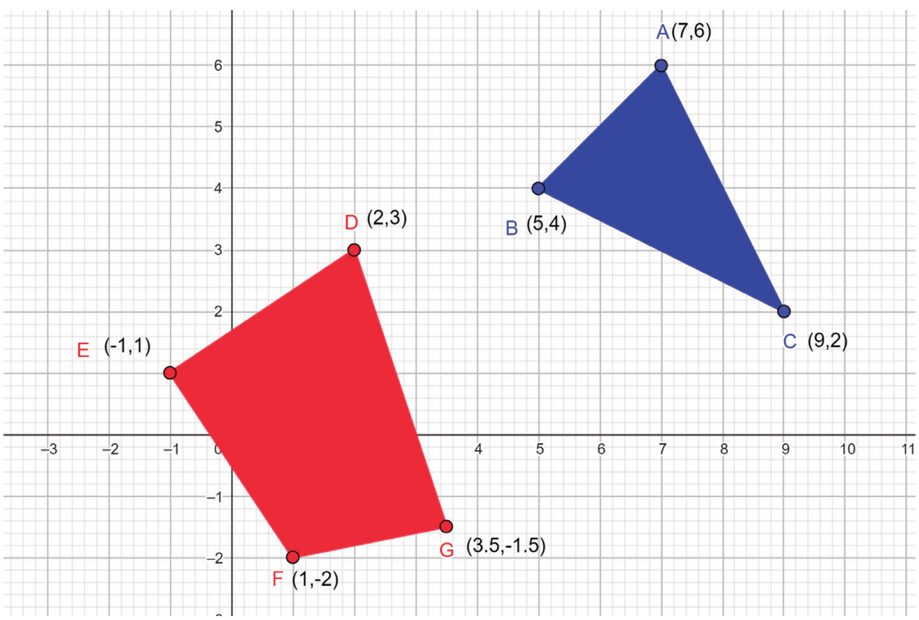
- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre geometría.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje la geometría.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de la geometría para su resolución.
- Modela, aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos geométricos.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación geométrica.

Tres puntos son **colineales**, si pertenecen a la misma línea recta.

Representación de polígonos en el plano

¿Cómo representamos polígonos en el plano?

Para **representar** un polígono en el plano cartesiano localizamos sus vértices y los unimos de manera ordenada, formando los lados de la figura. El polígono de menor cantidad de lados y vértices es el triángulo. Para representar un triángulo en el plano localizamos 3 puntos no **colineales** y los unimos. Para **formar** un cuadrilátero localizamos 4 puntos en el plano; para formar un pentágono 5 puntos; un hexágono 6 puntos y así sucesivamente. Según la cantidad de lados del polígono, localizamos la cantidad de puntos, siempre con la condición de que estos no sean colineales. En la siguiente imagen, observa que el triángulo ABC tiene vértices A (7,6), B (5,4) y C (9,2) y el cuadrilátero DEFG tiene vértices D (2,3), E (-1,1), F (1,-2) y G (3.5,-1.5).

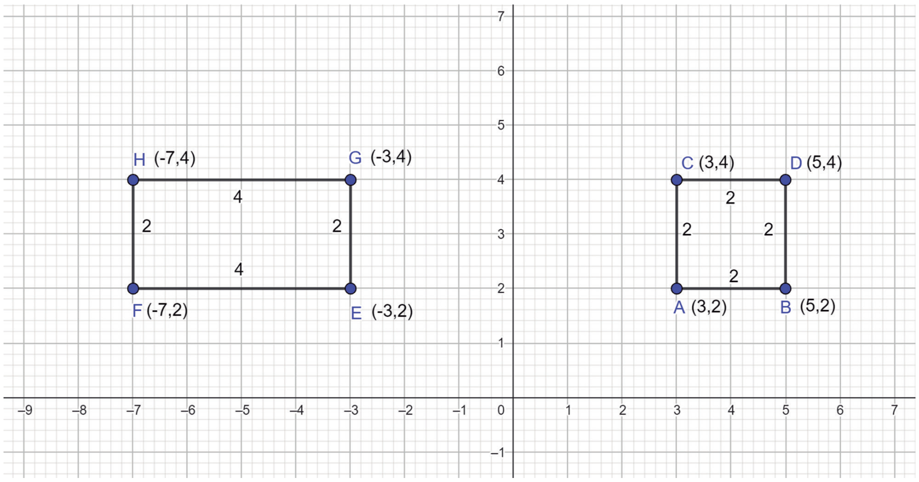


Un vértice es un punto donde se interceptan los lados de una figura o el punto común a los dos lados de un ángulo.

Las figuras geométricas se clasifican en regulares e irregulares. Las regulares son aquellas cuyos lados y ángulos interiores miden lo mismo, y las irregulares son aquellas cuyos lados y ángulos interiores tienen medidas diferentes.

La figura regular de 3 lados es el triángulo equilátero, de 4 lados es el cuadrado; de 5 lados o más se denomina polígono regular, por ejemplo, hexágono regular, que es de 6 lados.

Para **trazar** un cuadrado, a partir de un punto A (x,y), las coordenadas de los otros 3 vértices son B (x±a,y), C (x, y±a) y D (x±a,y±a). Para trazar un rectángulo, a partir de un punto E (x,y), las coordenadas de los otros 3 vértices son F (x±b,y), G (x, y±a) y H (x±b,y±a), veamos:



Otra opción en este caso donde, comenzamos a localizar los vértices del cuadrado, a partir del punto A (3,2), era restar 2 a la coordenada *x* obteniendo el punto (1,2), así como a la coordenada *y* obteniendo (3,0) y (1,0) respectivamente. Y para el rectángulo a partir del punto E (-3,2) era sumar 4 a la coordenada *x* obteniendo el punto (1,2), así como restar 2 a la coordenada *y* obteniendo (-3,0) y (1,0) respectivamente.

- **Representa** dos cuadriláteros y dos polígonos de más de 5 lados en el plano cartesiano, localizando las coordenadas de sus vértices y uniendo los vértices adyacentes.

Con el software *GeoGebra* puedes representar puntos, rectas y figuras geométricas en el plano cartesiano.

Para localizar un punto puedes hacerlo directamente con el comando que indica un punto con la letra A mayúscula o puedes escribir las coordenadas de un punto en la columna de la izquierda donde dice Entrada…escribiendo A=(x,y).

Para dibujar una recta resaltas el comando que indica una recta con dos puntos y ubicas dos puntos o escribes en la columna de la izquierda en la Entrada… la ecuación de la recta.

- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre geometría.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje la geometría.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de la geometría para su resolución.
- Modela, aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos geométricos.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación geométrica.

Distancia entre dos puntos

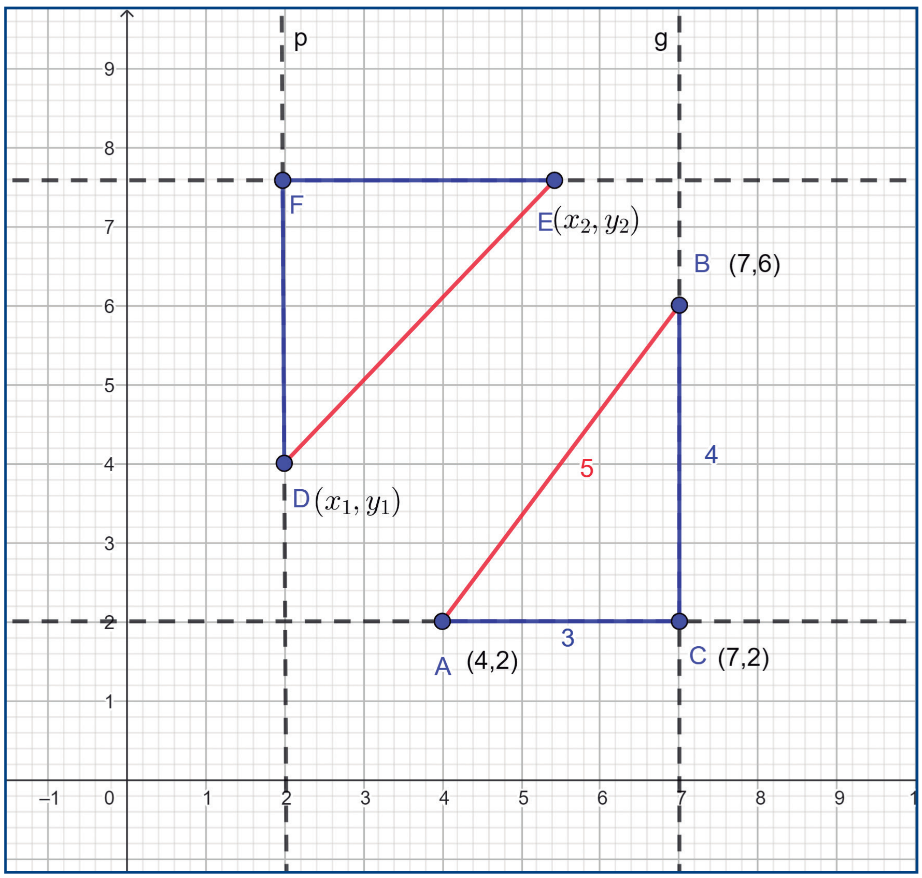
¿Cómo medimos la distancia entre dos puntos en el plano?

El teorema de Pitágoras afirma que:
Si los segmentos a y b representan los catetos de un triángulo rectángulo, y el segmento c la hipotenusa, entonces se cumple que:

$c^2 = a^2 + b^2$.

Los catetos de un triángulo rectángulo son los lados que conforman el ángulo recto, y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

Para **medir** la distancia entre dos puntos, A y B, que no estén en una misma recta horizontal o vertical, trazamos una recta horizontal que pase por A y una recta vertical que pase por B. Estas rectas se interceptan en el punto C y forman un ángulo recto. Luego, medimos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ que conforman el ángulo recto y al unir los puntos A y B, obtenemos el segmento $\overline{AB}$, formando el triángulo rectángulo ABC. De manera que, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia de A a B, ya que el segmento $\overline{AB}$ representa la hipotenusa del triángulo rectángulo, veamos:



Con *Google Maps* puedes medir la distancia entre dos puntos en el mapa; por ejemplo, la distancia entre Punta Cana y el lago Enriquillo es de aproximadamente 360 km en línea recta. Para medir la distancia haces clic en el botón derecho del ratón, eliges la opción«Medir distancia» y localizas los dos puntos sobre el mapa.

Al utilizar el teorema de Pitágoras tenemos que: $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (4)^2 + (3)^2 = 9 + 16 = 25. \quad c^2 = 25.$

$c = \sqrt{25}$, de donde resulta que $c = 5$

De manera general, podemos hallar la distancia entre 2 puntos utilizando sus coordenadas; si las coordenadas de los puntos son D (x_1,y_1) y E (x_2,y_2), la distancia entre ellos se denota $d_{D,E}$, entonces:

$d^2_{D,E} = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$ de donde:

$d_{D,E} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

La distancia entre los puntos A y B, usando sus coordenadas, se calcula como sigue: $d_{A,B}= \sqrt{(7-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Sean los puntos $G\left(\frac{11}{2}, \frac{22}{5}\right)$ y $H\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{3}\right)$ entre G y H es:

$$d_{G,H}\sqrt{\left(\frac{-7}{2}\ \frac{-11}{2}\right))^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{22}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-7-11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-22}{5}\right)^2}$$

$$d_{G,H}\sqrt{\left(\frac{-18}{2}\right)^2 + \left(-\frac{19}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(18 + \frac{361}{25}\right.} = \sqrt{\frac{2386}{25}} \approx 9.77$$

La distancia entre G y H es aproximadamente 9.77.

Localiza los puntos A (-3,2), B $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$, C $\left(\frac{-15}{4}, \frac{-9}{5}\right)$ y D (5,-4) en el plano cartesiano. Luego, **traza** los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{CD}$. Utiliza *GeoGebra* para hallar la longitud de los segmentos y descubre qué figura geométrica forman.

La distancia entre los puntos A y B es igual a la longitud del segmento $\overline{AB}$.

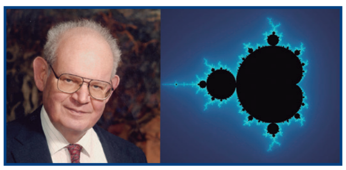
- Lee informaciones en diferentes contextos y a partir de los conocimientos que posee sobre geometría.
- Interpreta situaciones de la comunidad empleando en su lenguaje la geometría.
- Toma decisiones lógicas a partir del análisis sobre situaciones del entorno en las que se apliquen los principios de la geometría para su resolución.
- Modela, aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos geométricos.
- Razona y analiza las posibles soluciones de un estudio de caso referido a una situación geométrica.

Actividad grupal

Geometría fractal

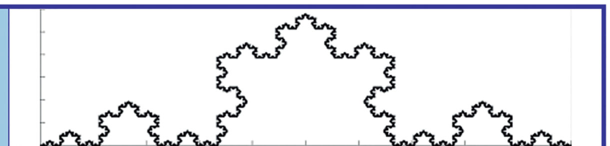
¿Qué haremos?

Dibujaremos fractales. Un fractal es un objeto geométrico cuya principal característica es que es autosemejante, es decir, está compuesto de copias más pequeñas de él mismo. Algunos de los fractales más conocidos son la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski.



Fuente: pbs

El matemático polaco Benoît Mandelbrot (1924-2010) es considerado el padre de la geometría fractal.

Curva de Koch	 Fuente: Matesfacil
Triángulo de Sierpinski	 Fuente: Freepik

¿Qué necesitamos?

Papel cuadriculado, cartulina, lápiz, colores, tijeras.

¿Cómo nos organizamos?

Nos organizamos en equipos de dos compañeros. Un compañero dibujará un fractal y el otro construirá un fractal con cartulina o buscará un software específico para dibujar fractales.

Fractales -¿Qué son?

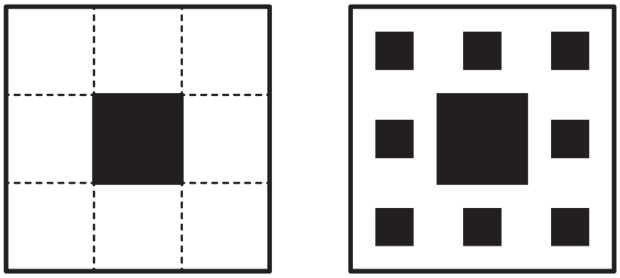
En este video encontrarás más detalles acerca de qué son los fractales y cómo se construyen.

https://www.youtube.com/watch?v=_W6HUHhXBWU

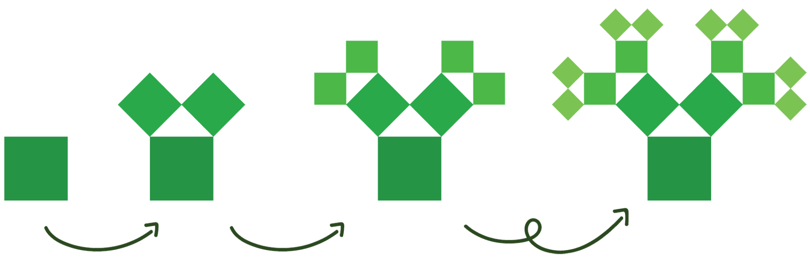
¿Cómo lo haremos?

Primero: cada compañero escoge el fractal que llevará a cabo, dibujado o con cartulina. Escoge alguno de los siguientes fractales o propone la creación de alguno, repite el paso inicial por lo menos cuatro veces.

Alfombra de Sierpinski: semejante al triángulo de Sierpinski pero usando cuadrados. Comienza con un cuadrado blanco que subdivides en 9 cuadrados iguales, de los cuales el que queda en el medio de todos se pinta de color negro y el resto se deja en blanco. Este proceso se repite en cada uno de los cuadrados blancos que se hayan formado.



Árbol pitagórico: una rama de este árbol se construye alternando cuadrados y triángulos rectángulos isósceles de la siguiente forma.



Segundo: dibujen el fractal y escriban una ficha descriptiva de los fractales que dibujaron, que incluya el nombre del fractal, las figuras geométricas utilizadas y las veces que repitieron el paso inicial.

Presentación y socialización de las actividades

La presentación de la actividad incluye los dibujos de los fractales y las fichas descriptivas. Si ubicaron algún software para dibujar fractales, incluyan las producciones elaboradas con el software.

Coevaluación

Escribe tu opinión acerca de qué observaste del proceso de dibujar los fractales llevado a cabo por tu compañero.

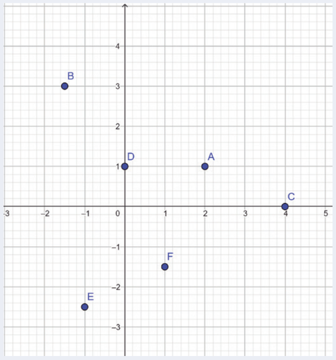
Autoevaluación

Escribe una reflexión sobre la actividad de dibujo del fractal. ¿Qué aprendiste sobre los fractales? ¿Qué preguntas te quedaron por responder?

- Emplea los conocimientos sobre geometría a la solución de un estudio de caso en la comunidad.
- Aplica, a partir de un informe escrito, procedimientos geométricos en la representación de problemas y situaciones de la comunidad.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre geometría.
- Utiliza en la presentación de un informe de investigación los conocimientos sobre geometría aplicando recursos de la tecnología.
- Aplica herramientas tecnológicas para resolver una situación particular de la comunidad, utilizando geometría.

Evaluación

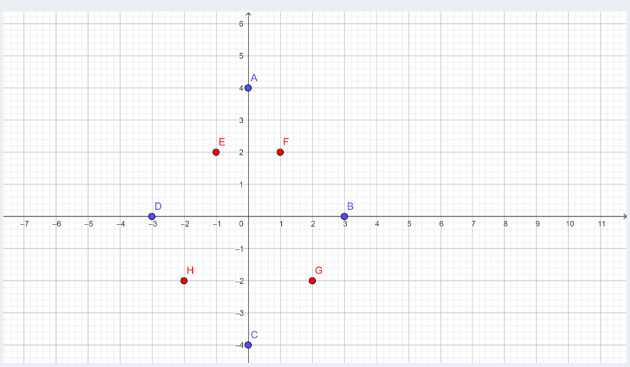
- **Diseña** una *línea del tiempo** donde describas brevemente la historia de la geometría. Señala fechas, personajes y objetos de estudio, incluye imágenes.
    - Herramienta visual para ordenar y explicar cronológicamente acontecimientos ocurridos a lo largo de un período.
- El autor de la obra los *Elementos* fue:
    - Pitágoras
    - Euclides
    - Tales
    - Riemann
- **Completa** las siguientes oraciones:
    - Por un punto pasan ________ rectas. Por dos puntos pasa ____________recta. Cuando tres puntos pertenecen a la misma línea recta son __________________. La intersección de dos planos no paralelos es ______________.
    - Por el punto $A\left(-\frac{4}{3},5\right)$ pasa la recta vertical de ecuación___________ y la recta horizontal de ecuación ____________.
- Para cada uno de los siguientes puntos, localiza el punto que está a la misma distancia del eje X que él, y el punto que está a la misma distancia del eje Y que él:
    - (-4, -3).
    - (2, -7)
    - $\left(\frac{9}{4}, \frac{13}{3}\right)$
    - $\left(\frac{-15}{2}, \frac{11}{3}\right)$
- **Localiza** en el plano cartesiano los puntos A (5,5), B (-5,5), C (5,-5) y D (-5,-5). ¿Qué figura se forma?
- **Localiza** en el plano cartesiano los puntos E (5,3), F (-5,3), G (5,-3) y H (-5,3). ¿Qué figura se forma?
- **Representa** en el plano cartesiano los triángulos ABC, DEF y GHI de coordenadas A(-7,2), B (-4,2), C $\left(\frac{-11}{2}, \frac{14}{3}\right)$, D (2,5), E (2,2), $F\left(6\,\frac{7}{2}\right)$, G (-2,-2), H (2,-6) e I (6,-4). Calcula la distancia entre sus vértices y determina qué tipo de triángulos son, según las medidas de sus lados.
- **Identifica** las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E y F del siguiente plano cartesiano:



- **Localiza** tres puntos en el plano cartesiano que sean vértices de un triángulo escaleno; otros tres para que sean vértices de un triángulo isósceles y, por último, tres puntos más para construir un triángulo equilátero.
- Para construir el siguiente fractal del triángulo de Sierpinski, el lado del primer triángulo equilátero mide 16 cm. Luego, se localizan los puntos medios de cada uno de sus lados, para construir los siguientes 3 triángulos. Si este proceso se repite 4 veces, ¿cuánto medirá el lado de los triángulos equiláteros en el cuarto paso?

- Para construir el siguiente fractal, el lado del primer cuadrado mide 81cm. Luego, se divide en 9 cuadrados y se componen como se indica. Si este proceso se repite 4 veces en cada cuadrado de color rosa, ¿cuánto medirá el lado de los cuadrados en el cuarto paso?

- **Identifica** las coordenadas de los puntos A, B, C y D; une los puntos en orden alfabético (y también une los puntos D y A) y descubre qué figura se forma. Igualmente, identifica las coordenadas de los puntos E, F, G y H, únelos en orden alfabético (y también une los puntos H y E) y descubre la figura geométrica que se forma.



- **Halla** la distancia entre los puntos E y H de la imagen anterior. ¿Cuál será la medida del segmento $\overline{FG}$ de la misma imagen?
- **Representa** un polígono irregular de 8 vértices, identifica las coordenadas de los vértices y halla la distancia entre los vértices adyacentes.
- **Representa** en un esquema los elementos básicos de la geometría y sus relaciones.

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
•	El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
•	He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…
•	Un tema de esta unidad sobre el que me gustaría estudiar o investigar más a fondo es...

Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 9

El triángulo y sus aplicaciones

Situación de aprendizaje

El *glamping* se hace cada vez más común en la República Dominicana.

Observa la imagen y responde.

¿Qué forma geométrica tiene la cúpula del *glamping*? ¿Por qué?

Contenido

- Clasificación de los triángulos
- Teorema fundamental del triángulo
- Elementos notables del triángulo
- Área de un triángulo
- Relación del triángulo con otros polígonos
- Actividad grupal
- Evaluación

Aa

Una **cercha**, en arquitectura, es la armadura que sostiene la cubierta de un edificio.

Fuente: Freepik

Un triángulo acutángulo es aquel que tiene tres ángulos agudos o menores de 90°.

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto o igual a 90°.

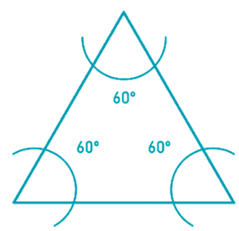
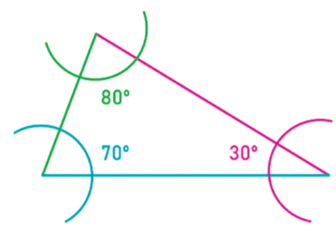
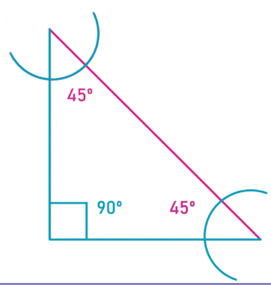
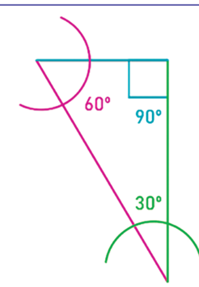
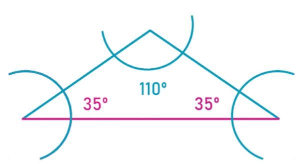
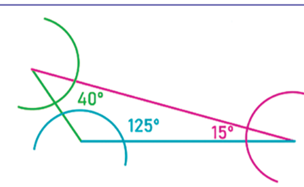
Un triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso o mayor a 90°.

Importancia de los triángulos en el mundo.
En este video puedes observar la variedad de usos de los triángulos de distintos tipos.

Clasificación de los triángulos

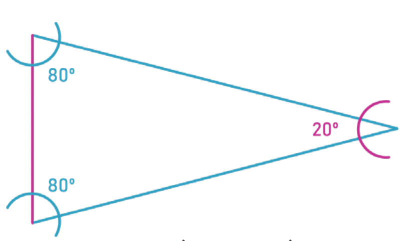
¿Cómo se clasifican los triángulos?

Según sus ángulos, los triángulos se **clasifican** en acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Un triángulo acutángulo, cuyos ángulos son iguales, también tiene sus tres lados iguales, con ángulos iguales a 60°. Un triángulo con dos ángulos iguales, también tiene dos lados iguales. Si los dos ángulos iguales miden 45°, entonces es un triángulo rectángulo, pues el tercer ángulo mide 90°.

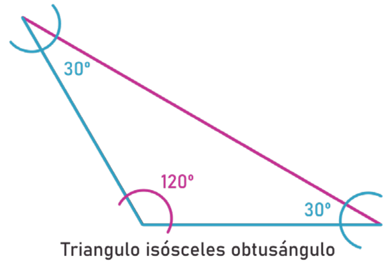
Triángulo	Lados azules iguales	Tres lados diferentes
Acutángulo		
Rectángulo		
Obtusángulo		

Los triángulos son muy utilizados en la arquitectura, ya que proporcionan resistencia y estabilidad. Los que más se utilizan son el equilátero y el isósceles. El triángulo equilátero es acutángulo, también llamado equiángulo.

Un triángulo isósceles puede ser acutángulo, rectángulo u obtusángulo.



Triangulo isósceles acutángulo



Triangulo isósceles obtusángulo

Según los constructores, el triángulo es el elemento estructural más estable, es la única figura geométrica que no se deforma ante un esfuerzo. Observa cómo se utiliza el triángulo en las **cerchas** del techo del estadio del Cibao y en las torres de electricidad:


Fuente: carteldeportivo.com


Fuente: Freepik

Autoevaluación

- **Observa** en la arquitectura de tu ciudad las edificaciones que existen e identifica el uso de los triángulos. **Analiza** qué tipo de triángulos están presentes.
- ¿Qué tipo de triángulo se forma al inclinar una escalera sobre una pared?

La **Sociedad de Arquitectos de la República Dominicana** (SARD) fue fundada en 1994 y su función es ordenar el ejercicio de la arquitectura, así como la representación y la defensa de los intereses de los arquitectos.

Las señales de tránsito triangulares son utilizadas para indicar peligro, lo cual permite prevenir y tomar decisiones adecuadas.


Desprendimientos


Pavimento deslizante

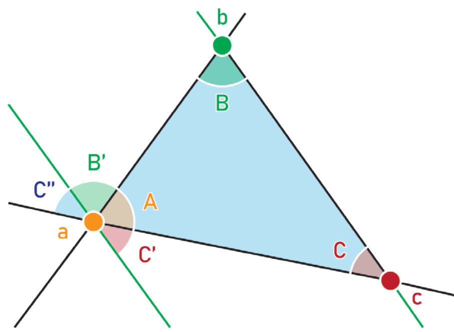
- Resuelve un estudio de caso del contexto que implique el conocimiento acerca de la geometría, respetando diferentes criterios de resolución de problemas.
- Resuelve, a partir de modelos geométricos situaciones que se presentan en la comunidad y el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de geometría.
- Asume con una actitud ética la solución de situaciones problemáticas del entorno, que se refieran a geometría.

Teorema fundamental del triángulo

¿Cuál es la propiedad más importante de un triángulo?

La propiedad más importante que tiene un triángulo es que la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual a 180°.

Veamos la demostración de esa propiedad:



Tenemos el triángulo ∆abc de ángulos ∠A ,∠B y ∠C.

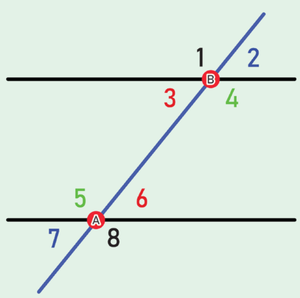
Queremos demostrar que

∠**A**+∠**B**+∠**C** =180°.

Según el teorema de los ángulos formado por dos rectas paralelas y una transversal, si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, sus ángulos alternos internos son iguales. Los ángulos ∠B y ∠B' y los ángulos ∠C y ∠C' son ángulos alternos internos.

Dos ángulos opuestos por el vértice son aquellos opuestos entre sí donde se cruzan dos líneas rectas.

Los ángulos 1 y 8, **2** y **7** son alternos externos.
Los ángulos **3** y **6**, **4** y **5** son alternos internos.



Paso 1: trazamos una recta que pase por los puntos b y **c**, y una recta paralela a ella que pase por el punto **a**.

Paso 2: trazamos una recta transversal a las rectas paralelas que pase por los puntos a y b, y otra recta que pase por los puntos **a** y **c**.

Paso 3: dibujamos los ángulos alternos internos de ∠B y de ∠**C**; por el teorema de los ángulos, formado por dos rectas paralelas y una transversal, sabemos que los ángulos ∠B y ∠B' son iguales. De manera análoga, los ángulos ∠**C** y ∠**C'**son iguales.

Paso 4: dibujamos el ángulo opuesto por el vértice de ∠**C'**, identificado como ∠**C''**. Los ángulos ∠**C'** y ∠C'' son iguales, por ser ángulos opuestos por el vértice.

Paso 5: observamos que ∠**A**+∠**B'**+∠**C''**=180°.

De donde ∠A+∠B+∠C =180°.

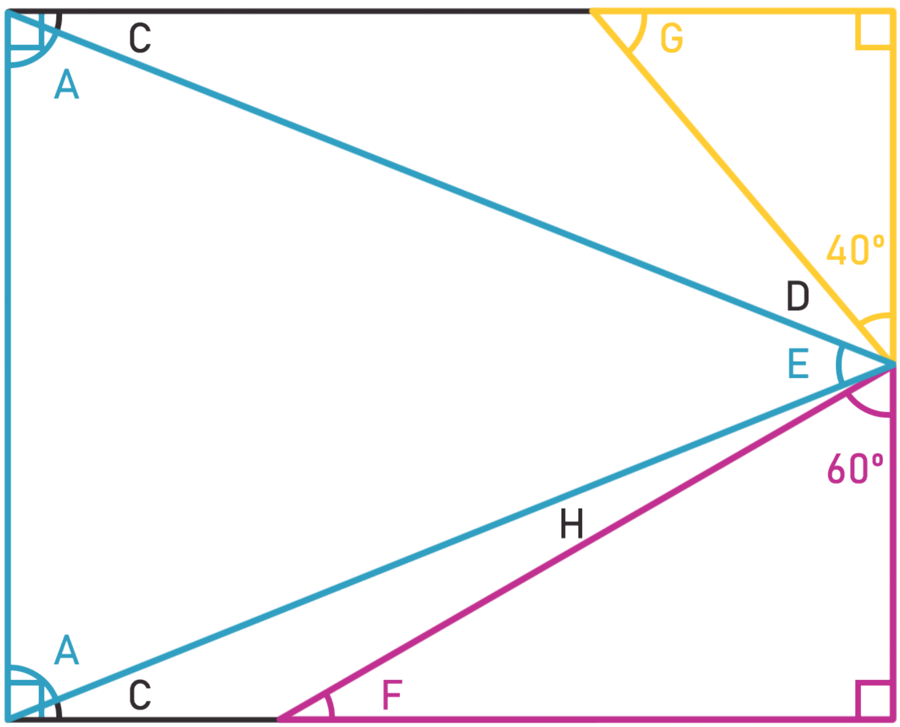
En la siguiente composición triangular, el ángulo ∠**A=68°**

Demostraciones visuales de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

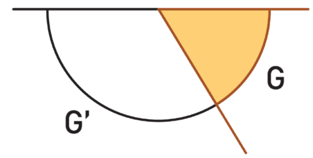
En este video puedes observar de distintas formas, cómo la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a 180°**.**

https://www.youtube.com/watch?v=0sAemvb0nil

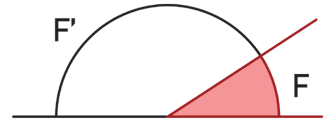
¿Cuánto miden los ángulos ∠C **∠E**, **∠F**?



Los ángulos ∠G y ∠G' son ángulos suplementarios, es decir, su suma es igual a 180°



De manera análoga, ∠F y ∠F'son ángulos suplementarios:



Como **∠A=68**° y 68°+ ∠C =90°, entonces ∠**C=22°**.

Como **∠A=68°** y 68°+68°+**∠E** =180°, entonces

∠E=180°-136°=44°, de donde:**∠E=44°**.

Como **∠F**+60°+90°=180°, entonces **∠F**=180°-150°, de donde **∠F=30°** .

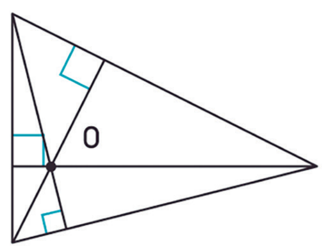
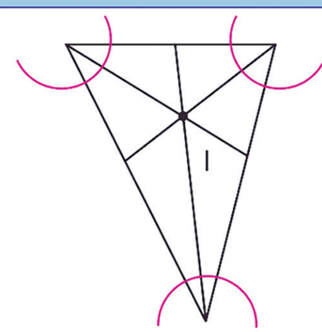
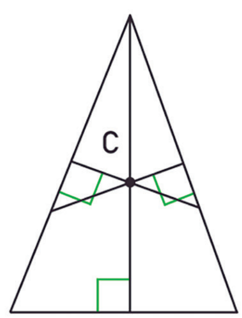
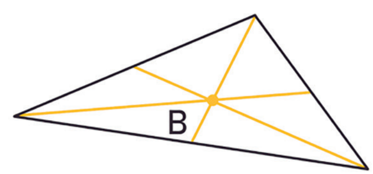
- **Halla** el valor de los ángulos **∠G**, ∠D y ∠H.
- **Comprueba** tus cálculos con *GeoGebra*.
- **Plantea** una composición triangular, de por lo menos dos triángulos, indicando el valor de cada ángulo de los triángulos.

- Resuelve un estudio de caso del contexto que implique el conocimiento acerca de la geometría, respetando diferentes criterios de resolución de problemas.
- Resuelve a partir de modelos geométricos situaciones que se presentan en la comunidad y el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de geometría.
- Asume con una actitud ética la solución de situaciones problemáticas del entorno, que se refieran a geometría.

Elementos notables del triángulo

¿Cuáles son los elementos más importantes de un triángulo?

Un triángulo tiene varias rectas o segmentos de rectas y puntos notables como son: las **alturas** y el **ortocentro**, las **bisectrices** y el **incentro,** las **mediatrices** y el **circuncentro**, y finalmente las **medianas** y el **baricentro**.

Alturas y ortocentro	Bisectrices e incentro
	
Mediatrices y circuncentro	**Medianas y baricentro**
	

El baricentro coincide con el centro de masas de un cuerpo y representa el centro de gravedad de un cuerpo, por lo cual es considerado un concepto importante en la física. Por esa razón, el baricentro es un criterio utilizado en ergonomía, que es la óptima adecuación entre un producto y el usuario. Un ejemplo de ello puede ser que para diseñar una mesa triangular de una sola pata se utiliza el baricentro para ubicar la pata.

Aa

La **altura:** es el segmento que inicia en un vértice y termina en el lado opuesto de este o sobre su prolongación de forma perpendicular; el **ortocentro** es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo.

La **bisectriz:** es el segmento que divide un ángulo en dos partes iguales y se prolonga hasta llegar al lado opuesto del ángulo; el **incentro** es el punto de intersección de las tres bisectrices del triángulo.

La **mediatriz:** es la recta perpendicular a un lado que lo divide en dos partes iguales; el **circuncentro** es el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo.

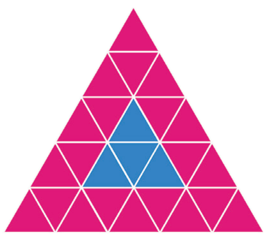
La **mediana:** es el segmento que inicia en un vértice y termina en el punto medio del lado opuesto; el **baricentro** es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo.

Medianas y baricentro de un triángulo con *GeoGebra*.

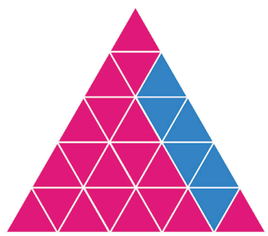
En este video observas cómo construir las medianas de un triángulo y hallar el baricentro usando *GeoGebra*. También conocerás una importante característica del baricentro.

https://www.youtube.com/watch?v=bim8-pKSKvs

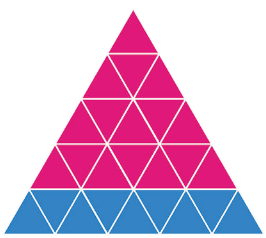
El baricentro también se **utiliza** en diseño gráfico, pues toda obra tiene un peso visual que determina el poder de atracción de cada elemento de la composición y que llama más la atención del observador. El peso de un elemento se determina tanto por su tamaño como por su posición respecto al resto de los elementos. Para destacar un elemento, se coloca en el centro o si el área es triangular en el baricentro. Observa las siguientes composiciones triangulares. Al hallar las medianas y el baricentro de cada una, la composición A es la que tiene el elemento central de color azul ubicado en el baricentro.



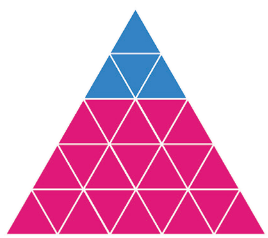
A



B

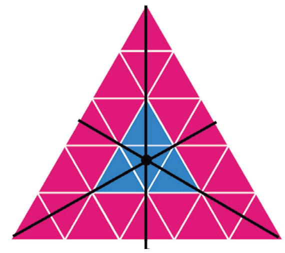


C

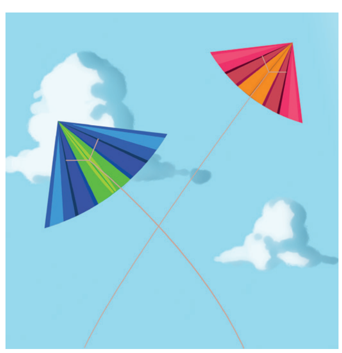


D

Esta composición tiene el elemento central de color azul ubicado en el baricentro.



- **Elabora** con tus compañeros de clases chichiguas de forma triangular y discutan dónde se ubica el centro de la misma. Tomen una decisión y expóngalo ante la clase, con orientación de su profesor.

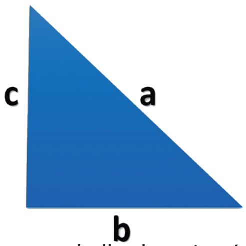


¿Cuánto miden los ángulos que se forman al trazar las bisectrices de un triángulo equiángulo?

- Resuelve un estudio de caso del contexto que implique el conocimiento acerca de la geometría, respetando diferentes criterios de resolución de problemas.
- Resuelve a partir de modelos geométricos situaciones que se presentan en la comunidad y el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de geometría.
- Asume con una actitud ética la solución de situaciones problemáticas del entorno, que se refieran a geometría.

Área de un triángulo

La **fórmula de Herón** sirve para calcular el área de un triángulo conociendo la medida de sus lados.



Primero se halla el semiperímetro, que es la suma de las medidas de los tres lados dividido entre dos:

- $s = \frac{(a+b+c)}{2}$
- Y luego el área utilizando el semiperímetro (s) y los lados a, b y c:
- $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

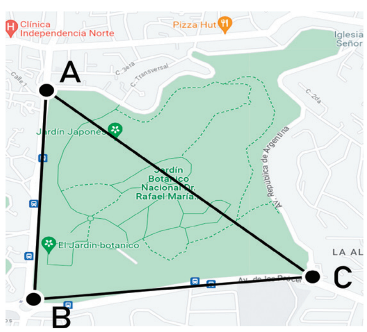
Cómo medir distancias en *Google Maps* punto a punto

En este video se explica cómo medir distancias con *Google Maps* desde un navegador.

https://www.youtube.com/watch?v=QNHVcXoeFfY

¿De qué formas se puede calcular el área de un triángulo?

El Jardín Botánico Nacional Dr. Rafael M. Moscoso es un área de vegetación silvestre preservada, ubicada en el Distrito Nacional. Al buscar en *Google Maps* la ubicación del Jardín observamos que ocupa un área importante y queremos conocer su medida de esta. Como la forma del Jardín es irregular, utilizaremos la técnica de la **triangulación**, es decir, dividiremos el área en triángulos. Para ello, ubicamos tres puntos, el punto **A** es la intersección de la Av. República de Colombia con la calle Los Conquistadores, el punto **B** es la intersección de la Av. República de Colombia con la Av. Los Próceres y el punto C es donde se encuentra la Av. Los Próceres con la Av. República de Argentina. *Google Maps* tiene una función para medir distancias, haciendo clic en el botón derecho del ratón, con lo cual podemos medir la distancia de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Así, hallamos que: $\overline{AB}$ =1.11 km, $\overline{BC}$ =1.27 km y $\overline{AC}$ =1.55 km. Para hallar el área de este triángulo no nos sirve la fórmula conocida hasta ahora $A=\frac{bh}{2}$, pues no conocemos la altura del triángulo (h), por eso utilizamos la **fórmula de Herón**.



Fuente: Google maps

Primero hallamos el semiperímetro:

$$s = \frac{1.55 + 1.11 + 1.27}{2}$$

$$s \approx 1.97$$

Luego, **hallamos** el área:

$$A = \sqrt{1.97\,(1.97-1.55)(1.97-1.11)(1.97-1.27}$$

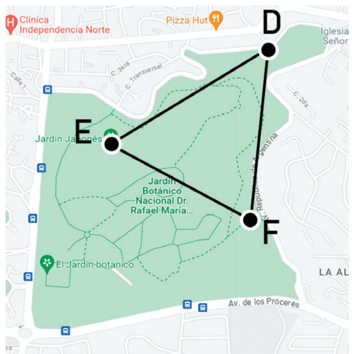
$$A = \sqrt{1.97\,(0.42)(0.85)(0.70)} \;=\; \sqrt{0.4980948} \approx 0.705758$$

De donde el área triangular mide 0.705758 km^2 o 705758m^2.

Hallemos otra área triangular del Jardín Botánico. En este caso, el segmento $\overline{DE}$ = 0.87 km, el $\overline{DF}$ =0.81 km y el $\overline{EF}$ = 0.76 km. *Google Maps* también mide el perímetro o distancia total desde el primer punto fijado hasta el último, en este caso el perímetro es 2.44 km. Usamos este dato para hallar el semiperímetro:

$$s = \frac{2.44}{2}$$

$$s = 1.22$$



$$A= \sqrt{1.22(1.22-0.87)(1.22-0.81)(1.22-0.76)}$$

$$A= \sqrt{1.22(0.35)(0.41)} \approx \sqrt{0.080532} \approx 0.283782$$

De donde el área triangular mide 0.283782 km^2 o 283,782m^2.

Fuente: Google maps

- En el Jardín Botánico quieren sembrar un área triangular de aproximadamente 4 m^2 con la planta Sansevieria.

  ¿Cuánto pueden medir los lados del triángulo para que encierren esta área?

  - a=2.3, b=3.1, c=4.2
  - a=2.6, b=3.1, c=4.05
  - a=2.7, b=3.5, c=4.1

- **Hallar** el área de los triángulos con las siguientes características:

  - Triángulo equilátero de lado 6.5 cm.
  - Triángulo isósceles de lado diferente 4.2 cm y lados iguales 3.8 cm.
  - Triángulo escaleno de lados 7.1 cm, 8.2 cm y 9.3 cm.

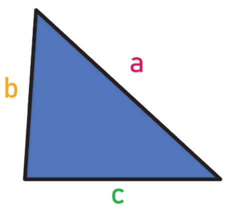
El **Jardín Botánico Nacional** fue inaugurado en 1976. Su función es estudiar, investigar y preservar la flora de República Dominicana. Su nombre, Dr. Rafael María Moscoso, es un homenaje al primer dominicano investigador de las Ciencias Botánicas.

Las medidas que hemos hallado del área del Jardín Botánico son aproximadas. Todavía podemos seguir triangulando el área total del Jardín, que tiene aproximadamente dos millones de m^2 en total según *Wikipedia*, apenas hemos medido 949,540m^2.

¿Qué otros triángulos podemos trazar en el área del Jardín Botánico?

- Resuelve un estudio de caso del contexto que implique el conocimiento acerca de la geometría, respetando diferentes criterios de resolución de problemas.
- Resuelve, a partir de modelos geométricos, situaciones que se presentan en la comunidad y el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de geometría.
- Asume con una actitud ética la solución de situaciones problemáticas del entorno, que se refieran a geometría.

La **desigualdad triangular.** Relaciona los lados del triángulo de la siguiente forma:



$a + b > c$

$a + c > b$

$b + c > a$

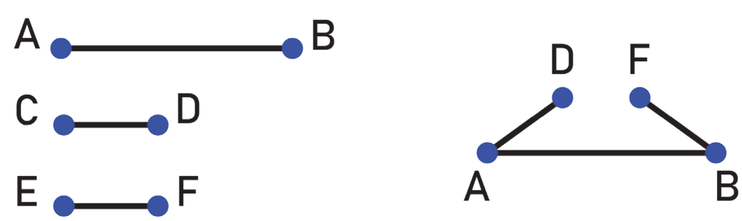
La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor a la longitud del tercer lado.

Relación del triángulo con otros polígonos

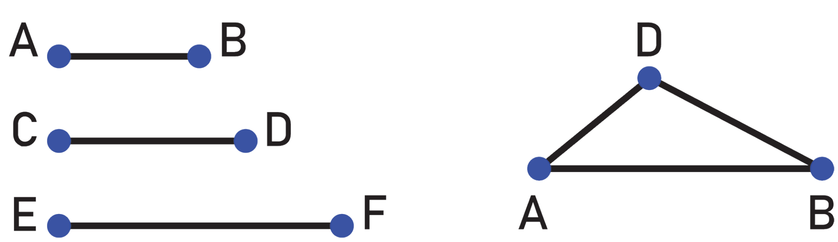
¿Cómo se relaciona el triángulo con otros polígonos?

Los triángulos tienen una propiedad llamada **desigualdad triangular.** Gracias a ella podemos determinar si las medidas de tres segmentos son adecuadas para construir un triángulo. Veamos:

Con segmentos de 1cm, 1cm y 2.5cm, no podemos construir un triángulo, pues $2.5+1=3.5>1$ sí cumple la propiedad, pero $1+1=2<2.5$ no cumple la propiedad. Geométricamente, podemos hacer coincidir el punto A con el C, y el punto B con el E, pero no hay forma de hacer coincidir los puntos D y F:

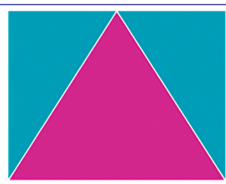


Con segmentos de 1.5 cm, 2 cm y 3 cm, sí podemos construir un triángulo, pues $1.5+2=3.5>3$, $1.5+3=4.5>2$ y $2+3=5>1.5$. Geométricamente, podemos hacer coincidir el punto A con el C, el punto B con el E y los puntos D y F, como se muestra en la imagen.



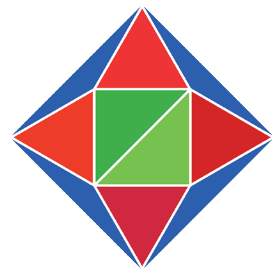
De manera que, siempre que tengamos tres segmentos, hay que comparar la suma de las medidas de dos de ellos con la medida del tercero y verificar que es mayor que esta, para decidir si con esos tres segmentos podemos construir un triángulo.

Con triángulos podemos **construir** diferentes figuras geométricas como cuadrados, rectángulos, hexágonos. Veamos en la siguiente imagen.

Figura	Características de los triángulos
	Cuadrado: dos triángulos rectángulos e isósceles pues los catetos deben medir lo mismo para que los lados del cuadrado midan lo mismo.
	Cuadrado: cuatro triángulos rectángulos e isósceles.
	Rectángulo: dos triángulos rectángulos escalenos más un triángulo equilátero.
	Hexágono: seis triángulos equiláteros, tres lados y tres ángulos iguales.

- **Construir**, si es posible, triángulos cuyos lados miden:
  - 6cm, 6cm y 6cm.
  - 6cm, 6cm y 5cm.
  - 6cm, 5cm y 4cm.
  - 5cm, 4cm y 1cm.
- **Plantea** tres formas de dividir una vara de 134cm de largo para formar un triángulo.

Si los triángulos rojos son equiláteros, ¿cuánto mide el ángulo obtuso de los triángulos azules?



- Resuelve un estudio de caso del contexto que implique el conocimiento acerca de la geometría, respetando diferentes criterios de resolución de problemas.
- Resuelve, a partir de modelos geométricos, situaciones que se presentan en la comunidad y el entorno.
- Resuelve un problema del contexto en el que se apliquen los conocimientos de geometría.
- Asume con una actitud ética la solución de situaciones problemáticas del entorno que se refieran a geometría.

Actividad grupal

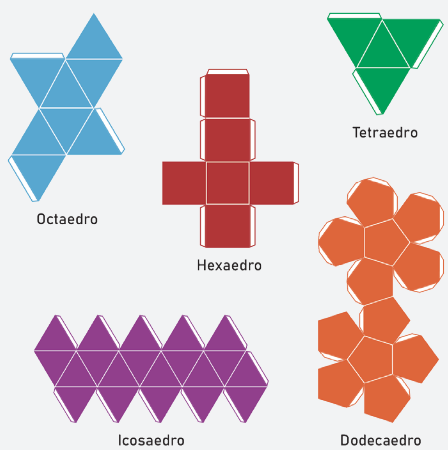
Construcción de los sólidos platónicos

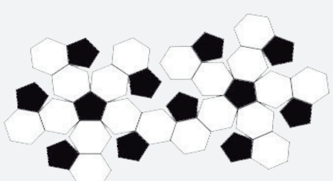
¿Qué haremos?

Construir los sólidos platónicos, que son cuerpos geométricos cuyas caras son polígonos regulares iguales, sus ángulos (diedros) son iguales, las aristas tienen la misma longitud y en todos los vértices coinciden el mismo número de caras y de aristas.

¿Qué necesitamos?

Cartulinas de cinco colores distintos, tijeras, lápices y la plantilla siguiente para dibujar los sólidos.





Icosaedro truncado para armar un balón de fútbol.

¿Cómo nos organizamos?

Nos **organizamos** en equipos de dos compañeros. Uno de los compañeros dibuja en una cartulina, del color de su preferencia, el tetraedro; en otra cartulina el hexaedro y en una tercera cartulina el octaedro. El otro compañero dibuja en las cartulinas de sus colores preferidos el icosaedro y el dodecaedro.

¿Cómo lo haremos?

Primero: cada compañero **escoge** las cartulinas de sus colores preferidos, dibuja cada uno de los poliedros regulares, recorta con una tijera las plantillas de los poliedros y los arma.

Segundo: ambos compañeros escriben una ficha descriptiva de los poliedros que dibujaron, que incluya número de caras, de aristas, de vértices y clasificación de las formas de las caras.

Presentación y socialización de las actividades

La presentación de la actividad incluye los poliedros regulares, su ficha descriptiva y una identificación del uso de los poliedros.

Coevaluación

Escribe qué observaste del proceso de construcción de los poliedros llevado a cabo por tu compañero. Si lo consideras necesario, dale alguna recomendación para la mejora.

Autoevaluación

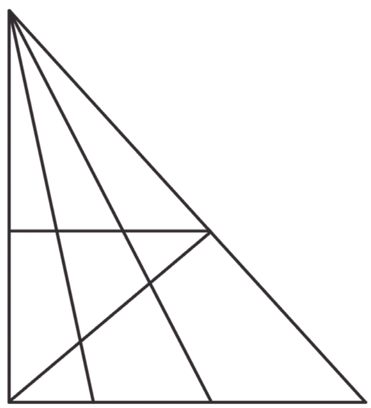
Escribe una reflexión sobre la actividad de dibujo y armado de los poliedros, y sobre su uso en distintas profesiones. ¿Qué aprendiste sobre los poliedros? ¿Qué dudas te quedaron sobre el tema?

•	En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
•	Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
•	El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
•	El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
•	El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…
•	He podido conectarme y consultar en Internet más datos sobre este tema…
•	Un tema de esta unidad sobre el que me gustaría estudiar o investigar más a fondo es...

- Emplea los conocimientos sobre geometría a la solución de un estudio de caso en la comunidad.
- Aplica, a partir de un informe escrito, procedimientos geométricos en la representación de problemas y situaciones de la comunidad.
- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre geometría.
- Utiliza en la presentación de un informe de investigación los conocimientos sobre la geometría aplicando recursos de la tecnología.
- Aplica herramientas tecnológicas para resolver una situación particular de la comunidad, utilizando la geometría.

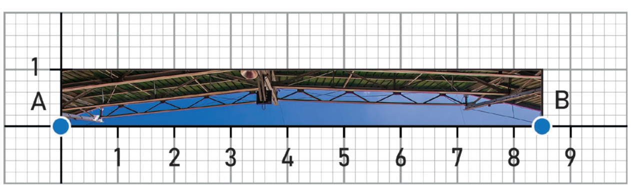
Evaluación

- ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?
  4, 7, 24, 18



- **Dibuja** cuatro triángulos isósceles, dos acutángulos y dos obtusángulos. En cada caso indica sus ángulos.

- La cercha del Estadio Cibao mide aproximadamente 8.5m de ancho y 0.5m de alto. ¿Cuáles pueden ser las medidas de los lados de los triángulos que la conforman? Utiliza *GeoGebra* para estimar las medidas.

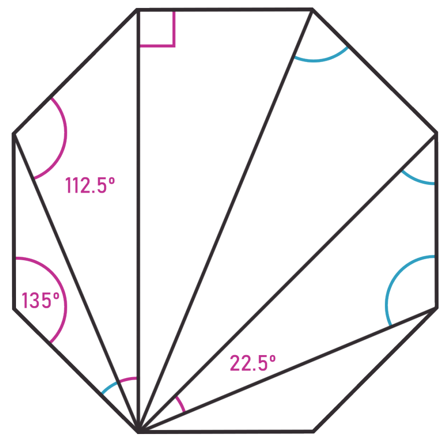


- **Observa** en los alrededores de tu casa una torre de electricidad o la siguiente fotografía; estima su altura, su ancho, la cantidad y el tipo de triángulos que la conforman, así como las medidas de estos. Utiliza *GeoGebra* para estimar las medidas.

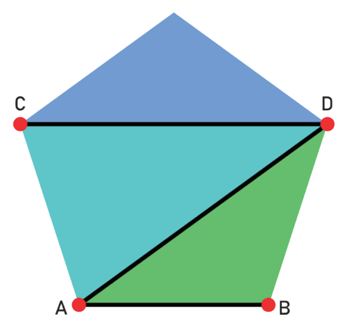
Fuente: Freepik.

-

- En el siguiente octógono regular, halla los ángulos dibujados en color verde.

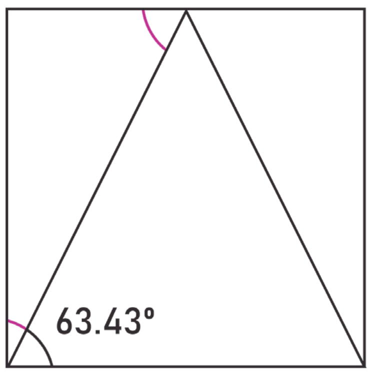


- En la escuela hay un jardín de forma pentagonal regular, el cual se quiere sembrar con tres plantas distintas según la siguiente distribución. ¿Cuál será el área de cada uno de los espacios a sembrar si $\overline{AB}$ **=1.5m y** $\overline{CD}$ **=2.4 m?**

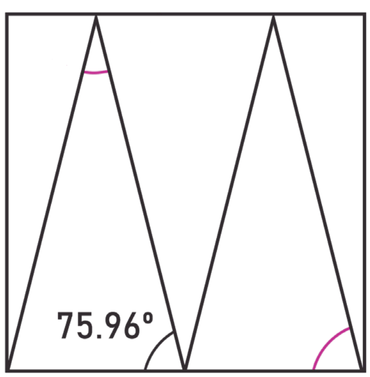


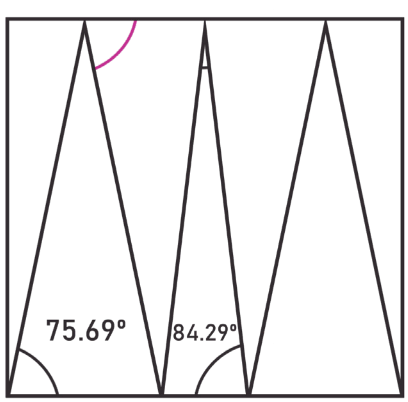
- Se necesita construir cuatro triángulos con listones de madera. Agrupa los listones según sus medidas para asegurar que podrá construirse un triángulo con ellos. Las medidas son: 10cm, 20cm, 30cm, 15cm, 10cm, 25cm, 12cm, 22cm, 38cm, 14cm, 16cm, 28cm.

- Los jóvenes de un instituto universitario visitaron el Parque Mirador Sur en Santo Domingo para conocerlo y dar un paseo. Al finalizar, observaron que la ruta que siguieron formaba un triángulo de lados 120m, 205m y 313m, ¿qué área encerró el paseo?

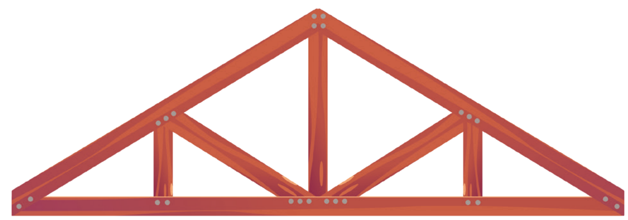


- **Hallar** los ángulos dibujados en color rojo:



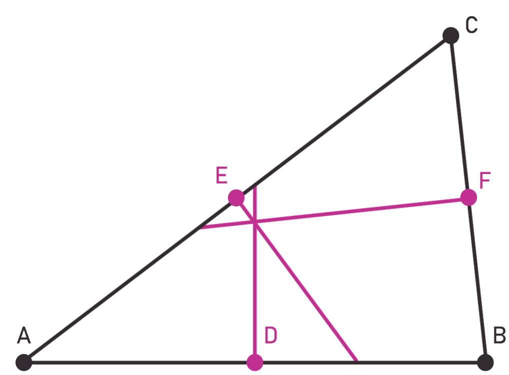


- ¿Cuánto miden los ángulos de los triángulos de la cercha?



- ¿Cuánto miden los ángulos que se forman al trazar las bisectrices de un triángulo de ángulos 50° y 70°?, ¿cuánto miden los ángulos de un triángulo rectángulo isósceles?

- ¿Cuánto miden los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{EF}$, $\overline{FB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$, al trazar las mediatrices del triángulo ABC si $\overline{AB}$ =7.36cm, $\overline{AC}$ = 8.5cm y $\overline{CB}$ =5.1cm?



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

Unidad 10

Polígonos y cuerpos geométricos

Situación de aprendizaje

En la naturaleza se encuentran cuerpos de forma esférica, desde el tamaño gigante como los astros, regular como algunas flores, pequeños como gotas de agua, hasta microscópicos como los virus. También, se encuentran objetos de forma esférica elaborados por el ser humano en obras de arte y tecnologías, tales como: la cestería, la cerámica, balizas en líneas de alta tensión y grandes esculturas y monumentos.

¿Por qué las gotas de agua tienden a tomar la forma de una esfera?

Dados un cubo, una pirámide y una esfera del mismo volumen, ¿cuál de estos tres cuerpos tiene la menor área superficial?

Contenido

El **perímetro** de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. En el caso de un polígono regular de n lados de longitud l, se tiene que su perímetro p es igual a: n·l.

Un **polígono:** es una figura geométrica plana cerrada limitada por segmentos de recta.

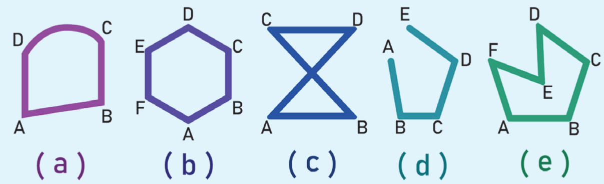
Herón de Alejandría fue un matemático e inventor que vivió en la antigua Grecia. Herón halló una fórmula para calcular el área de un triángulo usando solo las longitudes de sus tres lados.

Fuente: Wikipedia.org

En esta dirección se encuentra un ejemplo de aplicación de la fórmula de Herón en topografía.

Polígonos

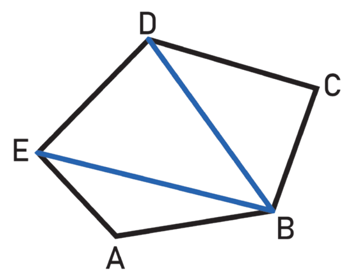
¿Cuáles de las siguientes figuras geométricas son polígonos?



Justifica tu respuesta.

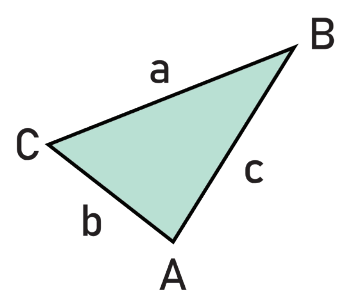
Los **polígonos** son figuras geométricas contenidas en un plano. Estos se clasifican de diferentes maneras según el número de lados, las longitudes de sus lados, las medidas de sus ángulos y las intersecciones de dos o más lados, entre otras. El **triángulo** se destaca entre los polígonos.

El triángulo es uno de los polígonos que encontramos con mayor frecuencia en situaciones de la vida diaria. También se encuentran muchos usos del triángulo en la geometría. Por ejemplo, para calcular el área de un polígono regular se puede recurrir a la descomposición de dicho polinomio en triángulos. Para ello, se calcula el área de cada uno de esos triángulos y se suman.



Calcular el área de esos triángulos puede resultar muy complejo mediante la fórmula tradicional: $A = (\frac{b \cdot h}{2})$. Si se conocen las longitudes de los lados de los triángulos, resulta mucho más sencillo y directo calcular el área del triángulo mediante la fórmula de Herón.

Fórmula de Herón



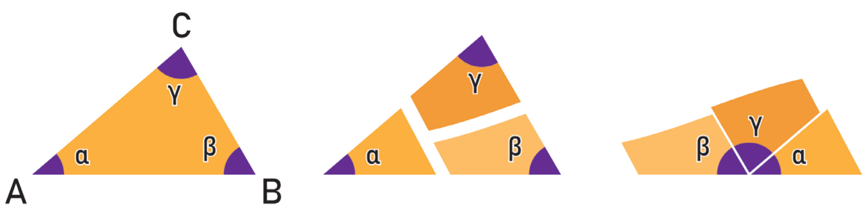
Sea ABC un triángulo cualquiera, cuyos lados tienen longitudes a, b y c respectivamente, para aplicar la fórmula de Herón se requiere calcular el semiperímetro del triángulo, esto es, el **perímetro** dividido entre dos. El perímetro del triángulo ABC es a + b + c, entonces el semiperímetro es: $S = (\frac{a+b+c}{2}$ a + b + c). La fórmula de Herón para hallar el área del triángulo ABC es: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

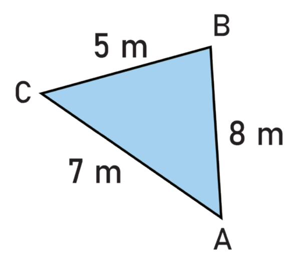
Ahora, **calcula** el área de un triángulo ABC cuyos lados tienen longitudes 5m, 4m y 3m, respectivamente.

Un teorema es una proposición que debe ser demostrada. Un teorema no queda demostrado mediante ejemplos. La demostración del teorema fundamental del triángulo, que se muestra aquí, se conoce como una demostración sin palabras, o demostración visual.

Teorema fundamental del triángulo

Este teorema plantea que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. Este teorema lo podemos comprobar experimentalmente de la manera siguiente. Sea ABC un triángulo cualquiera, nombramos a sus ángulos internos con las letras griegas α, β y γ, respectivamente, y lo recortamos en tres partes. Hacemos coincidir los vértices de estos tres ángulos en un mismo punto, por lo que obtenemos que su suma es igual a 180°.





Autoevaluación

- **Calcula** el área del triángulo ABC, las longitudes de sus lados se dan en la gráfica. Justifica tu respuesta.

Verifica su solución.

- Justificó el uso de la fórmula de Herón argumentando que en este caso se conocen las longitudes de los tres lados del triángulo dado.
- Identificó las longitudes de cada lado: a = 5 m, b = 7 m y c = 8 m.
- Calculó el semiperímetro del triángulo ABC: $s = \frac{5+7+8}{2} = 10$
- Sustituyó los valores de cada una de las variables en la fórmula de Herón y realizó los cálculos:

$$A=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=\sqrt{(1.5\cdot 3.2)}=\sqrt{300}$$

- Escribió la respuesta: el área del triángulo ABC es $\sqrt{300}$ m^2.

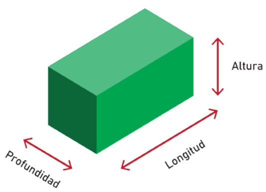
- Emplea el lenguaje matemático preciso en la interpretación de conceptos referidos a la geometría plana y su implicación con la fórmula de Herón y el teorema fundamental del triángulo.

Cuerpos geométricos

Aa

En matemáticas se usan diversos términos para referirse a los **cuerpos geométricos**, tales como: figuras geométricas de tres dimensiones, cuerpos sólidos y sólidos. Los cuerpos geométricos ocupan un cierto espacio, tienen un volumen, y tienen una superficie que los limita del resto del espacio.

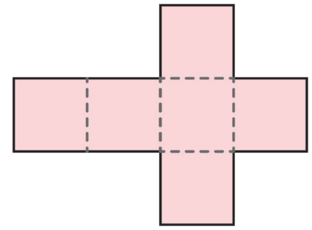
Los cuerpos geométricos se caracterizan por tener tres dimensiones: profundidad, longitud y altura.



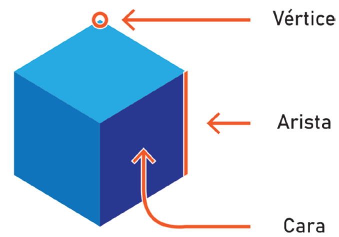
Emma Castelnuovo (1913-2014) fue una destacada italiana, profesora de matemática, que hizo importantes contribuciones a la enseñanza de esta disciplina, en especial de la geometría. Algunas ideas expuestas en esta lección están inspiradas en su trabajo didáctico. La profesora Castelnuovo estuvo en la VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática que se realizó en la República Dominicana 1987.

Fuente: elmundo.es

> Si se recorta en cartulina una figura en forma de cruz y se dobla por las líneas punteadas, ¿qué figura geométrica de tres dimensiones (3D) se obtiene?

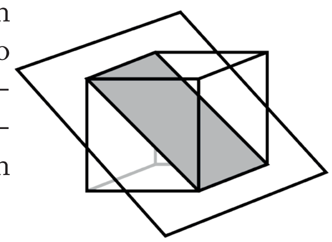


Hasta ahora se han estudiado los polígonos contenidos en un plano. Ahora estudiaremos los **cuerpos geométricos** o figuras geométricas de tres dimensiones (3D), limitadas por una superficie. Estudiaremos dos tipos de cuerpos geométricos: los poliedros y los cuerpos redondos. Los poliedros son cuerpos geométricos limitados por planos, estos se llaman caras. Los segmentos donde se intersecan las caras se llaman aristas y las intersecciones de las aristas se llaman vértices del poliedro.



La superficie de los cuerpos geométricos tiene un área total. El área de la superficie (su superficie) de un cuerpo geométrico es igual a la suma de todas las áreas de las caras que lo forman. Para hallar el área de la superficie de un cuerpo resulta de mucha ayuda conocer las fórmulas para calcular el área de los polígonos y de la circunferencia.

Otro concepto importante es el de la sección de un cuerpo geométrico. Al cortar un cuerpo geométrico con un plano, este interseca sus caras formando una sección. Por ejemplo, al cortar el cubo con un plano se forma una sección rectangular (región sombreada).

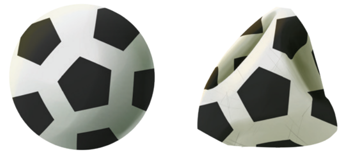


Los cuerpos geométricos tienen un volumen, en el caso de los poliedros se calcula, por lo general, multiplicando el área de su base por su altura. En las pirámides ese producto se multiplica además por $\frac{1}{3}$.

Relación superficie-volumen

Vimos que los cuerpos geométricos tienen un volumen, ocupan un lugar en el espacio y una superficie (que los limita del resto del espacio). ¿Existe alguna relación entre el volumen y la superficie de un cuerpo geométrico? Veamos unas situaciones en las que podemos estudiar esta relación.

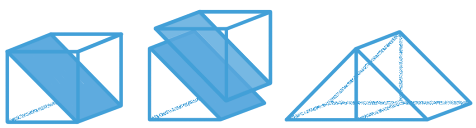
Luisa y sus amigas tienen dos balones de fútbol de la misma medida, uno de los balones está desinflado. Ambas bolas tienen la misma superficie, pero tienen volúmenes diferentes.



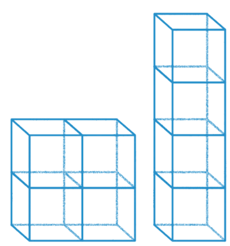
Fuente: Freepik

Manuel toca el acordeón en un grupo musical que interpreta piezas de merengue tradicional. El acordeón se encoge y se estira para producir sus sonidos característicos. Su área superficial es siempre la misma cuando se estira y se encoge, pero cambia su volumen.

María tenía un cubo de plastilina y lo cortó en dos partes, como se muestra en la figura. Con las dos partes que obtuvo construyó un sólido con dos caras en forma de triángulo. Ambos cuerpos geométricos tienen el mismo volumen, pero sus áreas superficiales son diferentes.



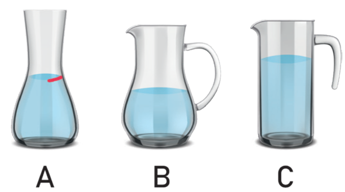
Rodrigo construyó un cuerpo geométrico con cuatro cubos, colocando dos cubos como base. Con otros cuatro cubos construyó una torre con un cubo como base. Ambos sólidos tienen el mismo volumen, contienen el mismo número de cubos, pero tienen áreas superficiales diferentes. Halla el área superficial de cada uno de estos dos cuerpos si los lados de los cubos miden 1cm.



En las situaciones anteriores encontramos unos cuerpos geométricos que tienen la misma área superficial y diferentes volúmenes, y otros que tienen el mismo volumen, pero diferentes áreas superficiales.

- Sara quiere construir sólidos usando solo triángulos. ¿Cuál es el mínimo número de triángulos que debe recortar para formar un sólido? ¿Cuál es el mínimo número de cuadrados con los que se puede construir un sólido? ¿Cuál es el menor número de pentágonos con los que se puede construir un sólido? ¿Se puede construir un sólido con cinco hexágonos? Justifica tus respuestas.

Ángel tiene tres jarras: A, B y C. Llenó la jarra A de agua hasta la marca roja y luego vertió esa agua en la jarra B. Volvió a llenar la jarra A con agua hasta la marca roja y echó esa agua en la jarra C. Por último, volvió a llenar de agua la jarra hasta la marca roja. Ángel afirma que la jarra C tiene más agua que la jarra A y que la jarra B tienen menos agua que las otras dos jarras.



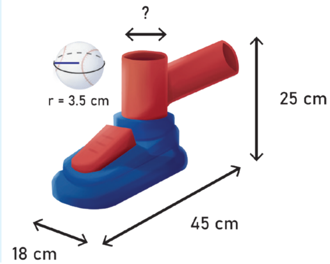
En el merengue dominicano se usan diversos instrumentos musicales de viento y de percusión. El acordeón es uno de los instrumentos que no puede faltar en un grupo de merengue.

- Expresa con ideas claras los conceptos, propiedades y relaciones referidos al volumen de cuerpos redondos y su aplicación en situaciones de la vida diaria.

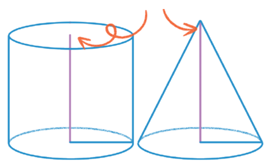
Cuerpos redondos

Se llama **sección plana** de un cuerpo geométrico, o simplemente sección, a la intersección de dicho cuerpo con un plano.

Un fabricante promociona un nuevo modelo de máquina para lanzar bolas de béisbol de juguete para el entrenamiento de niños. En el anuncio indican las dimensiones de la máquina y de la pelota. El radio de la pelota es de 3.5cm. Falta información en el anuncio. ¿Cuál medida mínima debería ir indicada en el tubo de salida de las pelotas, donde está el signo de interrogación?



En esta unidad estudiamos casi exclusivamente el cono recto y el cilindro recto. Es decir, conos y cilindros tales que su eje es perpendicular a su base.



Los cuerpos geométricos se clasifican en poliedros y cuerpos redondos. Los cuerpos redondos son un tipo de cuerpos geométricos cuyas superficies laterales no están formadas por polígonos contenidos en un plano. Estudiaremos tres cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera.

El cilindro

El cilindro es tal vez uno de los cuerpos redondos que nos encontramos con más frecuencia en la vida cotidiana y en el mundo laboral. Muchos recipientes (grandes y pequeños), como tuberías, canales, columnas y chimeneas, tienen forma de cilindro. Los cilindros tienen un área superficial y un volumen. Las magnitudes necesarias para calcularlos son el radio de su base y su altura. En muchas aplicaciones prácticas necesitamos calcular el volumen y la superficie de un cilindro. El volumen del cilindro se calcula mediante la fórmula:

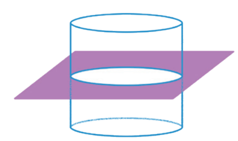
$$V = ab \cdot h, \text{ donde ab es el área de la base y h es la altura}$$

La base del cilindro es una circunferencia y el área de una circunferencia se calcula con la fórmula:

$A_b = \pi \cdot r^2$, donde *r* es el radio de la circunferencia. Entonces, la fórmula del volumen de un cilindro se puede expresar como:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, donde *r* es el radio de la base y *h* la altura del cilindro.

Toda **sección plana** de un cilindro, producida por la intersección con un plano paralelo a sus bases, es una circunferencia.



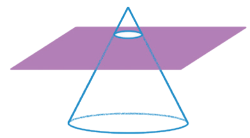
El cono

Los conos son muy comunes en los helados y en las señalizaciones de tránsito. Los conos tienen un área superficial y una base. Las magnitudes necesarias para calcularlos son el radio de su base y su altura. En muchas situaciones prácticas surge la necesidad de hallar la superficie y el volumen de un cono circular.

El volumen se halla mediante la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\, ab \cdot h, \text{ donde ab es el área de la base y h es la altura.}$$

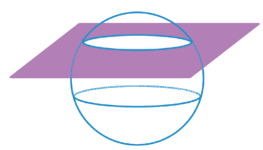
Toda sección plana de un cono producida por la intersección con un plano paralelo a su base es una circunferencia.



La esfera

Desde muy pequeños tenemos contacto con objetos con forma de esfera, es especial con las bolas. La esfera es un sólido limitado por una superficie, cuyos puntos están todos a una misma distancia de un punto fijo en el espacio llamado centro de la esfera. La distancia constante entre los puntos sobre la superficie y el centro se denomina radio de la esfera.

La esfera tiene un área superficial y un volumen. La magnitud necesaria para el volumen es su radio. En diversas situaciones surgen problemas cuya solución requiere calcular el volumen y la superficie de una esfera. El volumen de la esfera se calcula con la fórmula:



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ donde } r \text{ es el radio.}$$

Cuando un plano corta una esfera genera una sección plana de la esfera. Se tiene que toda sección plana de una esfera es una circunferencia. Por ejemplo, el plano sombreado de morado corta a la circunferencia y se intersecan formando una circunferencia.

- En los tres ejemplos antes presentados, de secciones de cuerpos redondos, cortamos cada cuerpo por un plano horizontal. ¿Qué forma tiene la sección de una esfera si el plano que la corta es vertical? ¿Qué forma tiene la sección de un cono si el plano que lo corta es horizontal? ¿Qué figura geométrica se forma en la intersección de un plano vertical y un cilindro?

En la geometría del espacio, las figuras geométricas de tres dimensiones tienen una superficie y un volumen. Cuando estudiamos la esfera podemos considerarla como un sólido o como un recipiente vacío, dependiendo del problema que queremos resolver.

Arybhata (476-550) es considerado como uno de los matemáticos y astrónomos más antiguos de la India. Arybhata calculó una aproximación del número π como: 3.14159265359.......

Fuente: wikipedia.org

- Expresa con ideas claras los conceptos, propiedades y relaciones referidos al volumen de cuerpos redondos y su aplicación en situaciones de la vida diaria.

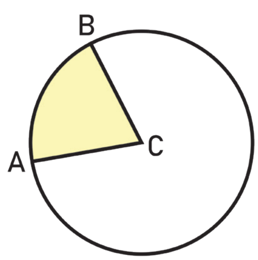
Construcción de cuerpos redondos

Aa

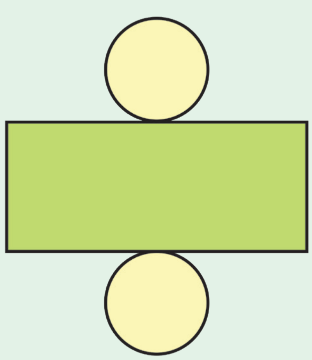
Un **sólido de revolución:** es un cuerpo geométrico que se obtiene girando en el espacio una superficie plana alrededor de una recta, la cual se llama eje de revolución. La superficie así generada se llama superficie de revolución.

También se dice que son generados por una curva (incluyendo una recta) que gira alrededor de un eje.

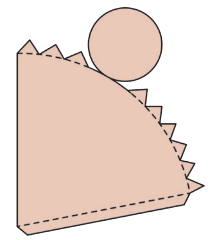
Un **sector circular:** es la región interior de una circunferencia limitada por dos radios. También se define como la porción de un círculo interior a un ángulo central. Por ejemplo, la región sombreada en amarillo es un sector circular.



La superficie total de un cilindro es igual a la suma de las áreas de sus bases (sombredas en amarillo) más el área de la superficie lateral (sombreada en verde).



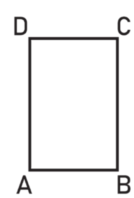
Amanda dibujó una plantilla, como la de la figura, sobre una cartulina, la recortó por las líneas continuas y la dobló por las líneas punteadas. Juan le preguntó a Amanda qué hacía. Ella dijo: «Construyo un cono». ¿Es cierto lo que Amanda dijo?

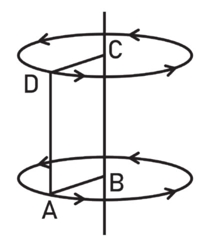


Hay varias maneras de construir modelos físicos de cuerpos redondos. Es muy importante distinguir entre el concepto de cuerpo redondo, un objeto geométrico abstracto y un modelo físico de un cuerpo redondo. Por ejemplo, con la plantilla que aparece en la figura de arriba se puede construir un modelo físico de un cono.

En la geometría plana, cuando se habla de construcción de figuras geométricas se refiere a construcciones con regla y compás. Estas construcciones se realizan en el plano y se materializan por lo general, sobre la superficie de una hoja de papel. En el caso de los cuerpos redondos, se estudia cómo son generados como sólidos de revolución. También se estudian otras formas de obtener un cilindro.

Generación del cilindro





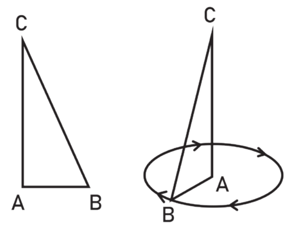
Consideremos el rectángulo ABCD, que aparece en la figura. Se gira el rectángulo alrededor del lado $\overline{CB}$. El lado $\overline{DA}$ se desplaza en el espacio, ocupando infinitas posiciones y generando una superficie cilíndrica. Los vértices A y D describen unas circunferencias a medida que el segmento $\overline{DA}$ gira. Los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ generan dos círculos respectivamente. El segmento $\overline{DA}$ recibe el nombre de generatriz y el segmento $\overline{CB}$ se denomina eje del cilindro.

También se puede **construir** un cilindro tomando una hoja de forma rectangular de cualquier material y la enrollamos hasta hacer coincidir uno de sus lados con el lado opuesto. La superficie lateral del cilindro es el área del rectángulo, con base igual a la longitud de la circunferencia de la base de cilindro y altura igual a la altura del cilindro.

De estas dos maneras podemos generar un cilindro. Como podemos ver, las bases del cilindro son círculos y su superficie lateral es un rectángulo.

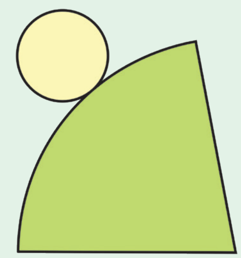
Generación del cono

Consideremos el triángulo ABC, que aparece en la figura. Se gira el triángulo alrededor del lado $\overline{AC}$. El lado $\overline{BC}$ se desplaza en el espacio, ocupando infinitas posiciones y generando una superficie cónica. El punto B genera una circunferencia y el segmento $\overline{AB}$ genera un círculo, el cual es la base del cono.



También podemos construir un cono a partir de un sector circular. Para ello, tomamos una hoja de cualquier material con la forma de un sector circular, la enrollamos hasta hacer coincidir uno de los lados (uno de los radios) del sector circular con el otro y se forma un cono. La superficie lateral de un cono es igual al área del sector circular con lados iguales a la altura inclinada del cono y un arco igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

La superficie de un cono es igual a la suma del área de su base (sombreada en amarillo), más el área del sector circular (sombreado en verde).

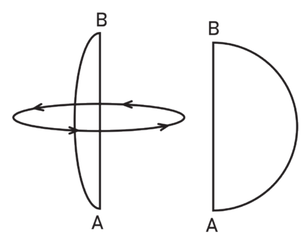


La fórmula para calcular el área de la superficie lateral del cono es:

$A = \pi \cdot r \cdot l$, donde *l* es la altura inclinada o generatriz y *r* el radio de la base.

Generación de la esfera

Consideremos el semicírculo de diámetro AB que se muestra en la figura. Giramos el arco AC alrededor del diámetro y se genera una esfera.



Construir una esfera a partir de una hoja de cualquier material resulta mucho más difícil. No contamos con una manera tan sencilla como en los casos del cilindro y el cono.

- Ángela tiene que construir un toldo para una fiesta de forma cilíndrica y con el techo en forma de cono (ver la figura al lado). La altura del toldo desde el piso hasta el vértice del cono es de 2.5m y las columnas miden 2m. El radio de la base del cono es de 3m. ¿Cuánta tela necesita Ángela para el techo y las cortinas?

Fuente: Freepik

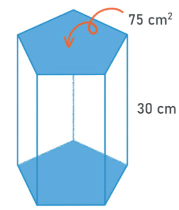
- Expresa con ideas claras los conceptos, propiedades y relaciones referidos al volumen de cuerpos redondos y su aplicación en situaciones de la vida diaria.

Aa

El **volumen:** se define como la medida de la porción del espacio ocupado por un cuerpo. La unidad de medida del volumen es el metro cúbico, en símbolo se escribe m^3.

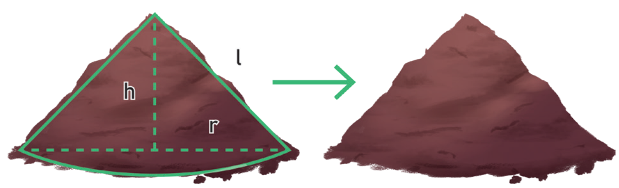
Aplicación del volumen de cuerpos redondos

En la figura que se muestra, se observa un prisma de base hexagonal cuya área es de 75 cm^2 y su altura es la indicada en la figura. ¿Cuál es el volumen de dicho prisma?



Para **calcular** el **volumen** de los cuerpos redondos se usa una técnica similar a la empleada para **calcular** el volumen de los prismas. Veamos una situación en la que se requiere calcular el volumen de tierra en un montón, en el que se puede modelar un cono.

El papá de Luisa trabaja en una construcción donde removieron una cantidad de tierra y formaron un montón, él necesita estimar la cantidad de tierra, en metros cúbicos. En casa, le oyó decir a Luisa que había estudiado en matemáticas cómo calcular el volumen de los cuerpos redondos y le pidió que le ayudara a calcular el volumen de tierra.

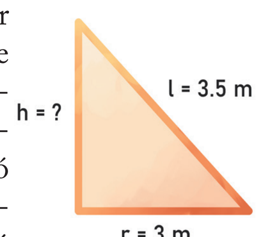


¿Cómo calculó Luisa el volumen de tierra en el montón? ¿Qué datos necesita para calcular ese volumen? ¿Cuáles dimensiones del montón de tierra puede medir con facilidad?

Luisa asumió que el montón de tierra tiene forma de un cono recto. El volumen de este cuerpo redondo es igual un tercio ($\frac{1}{3}$) del producto del área (A) de su base por su altura (h), esto se expresa en una fórmula como:

$$V=\frac{1}{3}\ A\cdot h=\frac{1}{3}\ (\pi\cdot r^2)\cdot h=\frac{1}{3}\ \pi\cdot h\cdot r^2$$

Para usar esta fórmula, Luisa tendría que conocer la altura (h) del montón de tierra y el radio (r) de su base (asumiendo que esta tiene forma de circunferencia). Ninguna de estas dos cantidades las puede hallar directamente con facilidad. Luisa decidió usar una cuerda para estimar la longitud de la circunferencia (C) de la base, obtuvo C = 19m y midió



la longitud (l) de una generatriz del cono, l = 3.5m. Luisa sabe que la longitud C de una circunferencia es: C = 2·π·r, entonces, el radio de la base del montón de tierra es:

$$r = \frac{c}{2\pi} = \frac{19m}{2\cdot 3.14} = \frac{19m}{6.28} = 3.025m \approx 3m.$$

Como el radio, la generatriz y la altura del cono forman un triángulo rectángulo, se puede usar el teorema de Pitágoras para hallar la altura. Entonces, $(3.5\ m)^2 = (3\ m)^2 + h^2$. De donde se tiene que:

$$h^2 = (3.5m)^2 - (3m)^2 = 12.25m^2 - 9m^2 = 3.25m^2.$$

Se tiene que: $h^2 = 3.25m^2$, $h = \sqrt{(3.25m^2)} \approx 1.8m \approx 2m$. El volumen del montón de tierra es aproximadamente igual a:

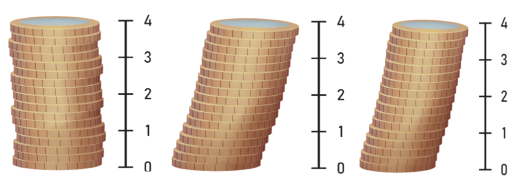
$$V = (\tfrac{1}{3})\pi(2m)(3m)^2 = (\tfrac{1}{3})(3.14)(2\ m)(9m^2) = (\tfrac{1}{3})(3.14)(18m^3)$$

$$= (3.14)(6m^3) \approx 18.84m^3$$

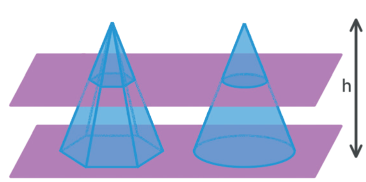
Principio de Cavalieri

El principio de Cavalieri para cuerpos geométricos postula que si dos cuerpos tienen la misma altura y sus secciones transversales correspondientes tienen la misma área a lo largo de la altura, entonces esos cuerpos tienen volúmenes iguales.

Por ejemplo, tomemos una pila de monedas. Desplazamos las monedas uniformemente hacia la derecha. Las monedas conservan sus dimensiones y las tres pilas de monedas tienen la misma altura. Las tres pilas de monedas tienen el mismo volumen.

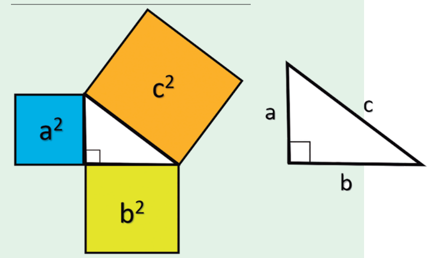


- En la figura que se muestra al lado, se tiene que la pirámide hexagonal y el cono tienen la misma altura. Las bases y las secciones de ambos cuerpos geométricos tienen áreas iguales. Basándote en el principio de Cavalieri, ¿qué puedes afirmar sobre los volúmenes de ambos cuerpos?



Para efectos prácticos, la aproximación de π como 3.14 es comúnmente usada. Sin embargo, hay que tener siempre en cuenta que π es un número irracional, con parte decimal infinita no periódica.

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos.



- Expresa con ideas claras los conceptos, propiedades y relaciones referidos al volumen de cuerpos redondos y su aplicación en situaciones de la vida diaria.
- Interpreta haciendo uso del razonamiento lógico, situaciones que impliquen números reales y sus propiedades conectando con el razonamiento espacial y gráfico.

Actividad grupal

Construyamos una tarjeta *pop-up*

¿Qué haremos?

Construiremos una tarjeta de cartulina denominada *pop-up*, en la que al abrirla se despliega una figura geométrica de tres dimensiones (3D).

¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra, compás, lápices de colores o marcadores, pegamento, cartulina, cortador y tijeras.

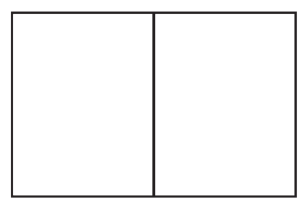
¿Cómo nos organizamos?

Forma un equipo con dos de tus compañeros de clase. Todos los miembros del equipo son responsables de la realización de todo el trabajo necesario para completar esta actividad.

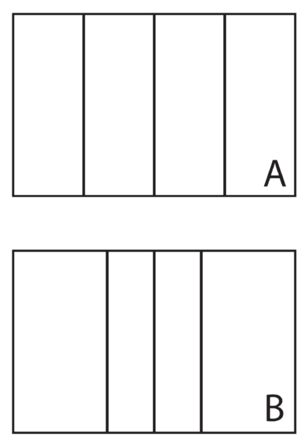
¿Cómo lo haremos?

Primero, conformen el equipo de trabajo y **asegúrese** de que tienen todos los materiales necesarios para realizar la actividad grupal.

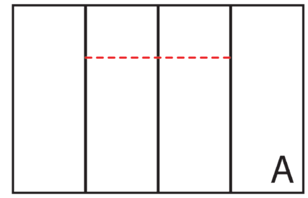
Segundo, tomen una hoja tamaño carta, dóblenla por la mitad por la parte más larga y recórtenla por la línea marcada. De esta manera, tienen dos piezas de papel para armar la tarjeta. Repitan esta operación hasta obtener por lo menos tres piezas de papel cada uno. Tracen una línea por la mitad del lado más largo de cada pieza de papel.



Tercero, en una de las piezas **dividan** cada mitad en dos partes iguales con una línea. En otra pieza dividan cada mitad en tres partes iguales; marquen con una línea las dos terceras partes en el centro de la pieza de papel. Ver las figuras que se muestran a la derecha. Preparen dos piezas de papel como estas para cada miembro del equipo.

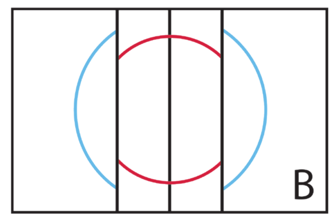


Cuarto, en la pieza de papel A **dibujen** una línea punteada a 3cm del borde (ver figura). Hagan un corte en el papel con el cortdor o cutter. Tengan mucho cuidado al manipular el cortador y para no dañar la superficie sobre la que se apoyen.

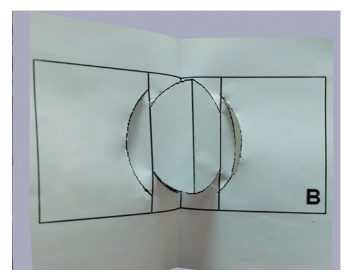


Quinto, doblen la pieza de papel A como se indica en la figura. Peguen por detrás otra pieza de papel, sin pegamento sobre la parte recortada del centro.

Sexto, en la pieza de papel B **dibujen** dos circunferencias concéntricas que estén centradas en el punto medio del segmento que divide la pieza en dos partes iguales, tal como se muestra en la figura. Por último, corten por los arcos de circunferencia indicados.



Séptimo, doblen la pieza de papel B como se indica en la figura a la derecha. Decoren las tarjetas con motivos alusivos a los temas de geometría estudiados en esta unidad.



Presentación y socialización de las actividades

Hagan una exposición en su clase donde muestren las tarjetas que elaboraron. Expliquen a sus compañeros los conocimientos de geometría involucrados en el diseño y construcción de la tarjeta. Elaboren un informe sobre la actividad. Deben incluir en el informe los resultados de la coevaluación y la autoevaluación hecha por cada miembro del equipo.

Coevaluación

Describe y **valora** la contribución de cada uno de tus compañeros al trabajo en equipo. Incluye tus apreciaciones en el informe.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo debe **responder** individualmente a las siguientes interrogantes: ¿qué fue lo más interesante al realizar esta actividad?, ¿qué cosas aprendí para poder superar los retos en esta actividad?, ¿qué aprendí para mejorar mis habilidades de trabajo en equipo para el futuro?

- Expresa con ideas claras los conceptos, propiedades y relaciones referidos al volumen de cuerpos redondos y su aplicación en situaciones de la vida diaria.
- Interpreta, haciendo uso del razonamiento lógico, situaciones que impliquen números reales y sus propiedades conectando con el razonamiento espacial y gráfico.

Evaluación

- Se excavó un pozo cilíndrico de 4m de profundidad y de un diámetro de 2m. ¿Cuál es la superficie del revestimiento necesario para cubrir la pared y el fondo del pozo?

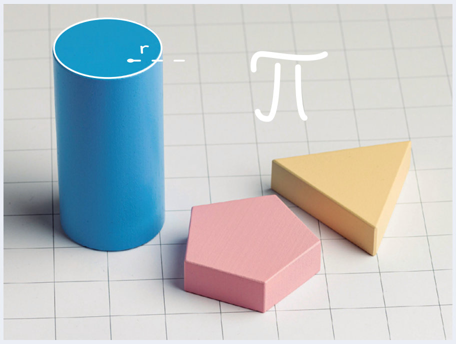
- Se tiene una pieza metálica de forma rectangular de dimensiones de 10m por 5m.

    - ¿Cuál es el volumen del cilindro que se obtiene al girar la lámina alrededor del lado más largo?
    - ¿Cuál es el volumen del cilindro que se obtiene al girar la lámina alrededor del lado más corto?
    - ¿Cuál es el volumen que se obtiene al girar la lámina alrededor del eje simetría por el lado más corto?
    - ¿Cuál es el volumen que se obtiene al girar la lámina alrededor del eje simetría por el lado más largo?

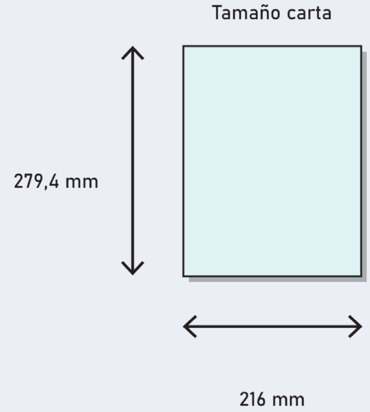
- Se necesita construir un tanque cilíndrico para agua de $20m^3$ de capacidad y que tenga un radio máximo de 1m. ¿Cuál es la profundidad del tanque?

- Dado que las circunferencias de las bases de un cilindro tienen una longitud de 14cm respectivamente. ¿Cuál sería el volumen del cilindro que tenga una altura de igual longitud que el diámetro de su base?

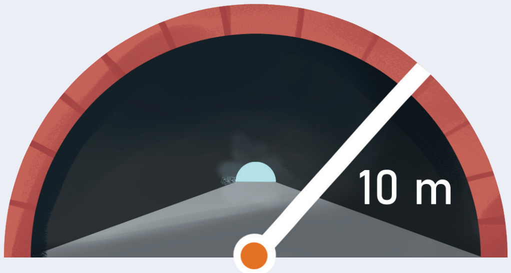
- **Calcula** el radio de las bases de un cilindro recto, cuyo volumen es $76\pi cm^3$ y su altura es de 20cm de longitud.



- Con una hoja de papel tamaño carta se pueden construir dos cilindros, según se enrolle la hoja por el lado más corto o por el lado más largo. **Calcula** el volumen de esos dos cilindros, ¿son los volúmenes diferentes?



- Un túnel de sección semicircular, tiene una longitud de 500m de largo y un radio de 10m. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra fueron excavados para construir el túnel?



- Unos trabajadores apilaron una cantidad de arena en forma de cono circular recto de 1.5m de altura y 3m de diámetro. ¿Cuántos metros cúbicos de arena apilaron los trabajadores?

- Halla el volumen de un cono circular recto dadas sus respectivas alturas y áreas de las bases.

    - h = 3cm, b = 4Ãm2
    - h = 4m, b = 12.56 m2

- **Halla** el volumen de un cono circular recto dadas sus respectivas alturas y el radio de sus bases.
  - h = 2.5m, r = 1.72m
  - h = 36.4cm, r = 18.53cm

- **Dibuja**, indicando sus dimensiones, un cono y un cilindro que tenga el mismo volumen.

- María trabaja como pintora profesional. Ella calcula el presupuesto de su trabajo según los metros cuadrados que debe pintar. Una empresa le solicita a María un presupuesto sobre el costo de pintar un tanque esférico de 18m de diámetro. ¿Cuál es el tamaño de la superficie que María debe considerar para calcular el presupuesto?

- **Halla** el volumen de las esferas cuyos radios son:
  - r = 12m
  - r = $\frac{1}{4km}$

- Halla el volumen de las esferas de diámetros:
  - d = 256.32mm
  - d = 1,475km

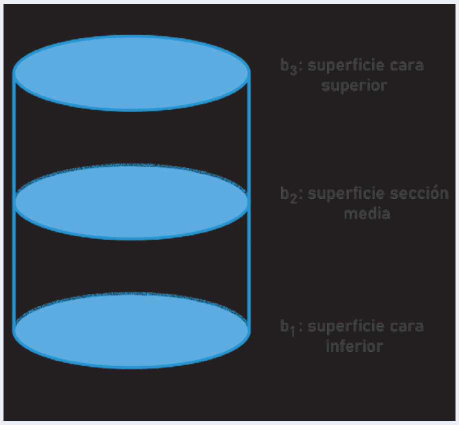
- ¿Qué forma tienen todas las secciones planas de una esfera?

- ¿Cuál figura geométrica genera una esfera? ¿Cuál figura geométrica genera un cono? ¿Cuál genera un cilindro? En cada caso indica cuál es el eje de revolución.

- La Fórmula de Simpson es una fórmula muy peculiar que sirve para calcular el volumen de siete cuerpos, entre ellos: el cono, el cono truncado y la esfera. Esta es la fórmula de Simpson:

$$V= \frac{h}{6}(b_1+4b_2+b_3)$$

Donde *h* es la altura del cuerpo geométrico, b_1 es la superficie de la cara inferior, b_2 la superficie de la sección media y b_3 la superficie de la cara superior. Por ejemplo, en el cilindro:



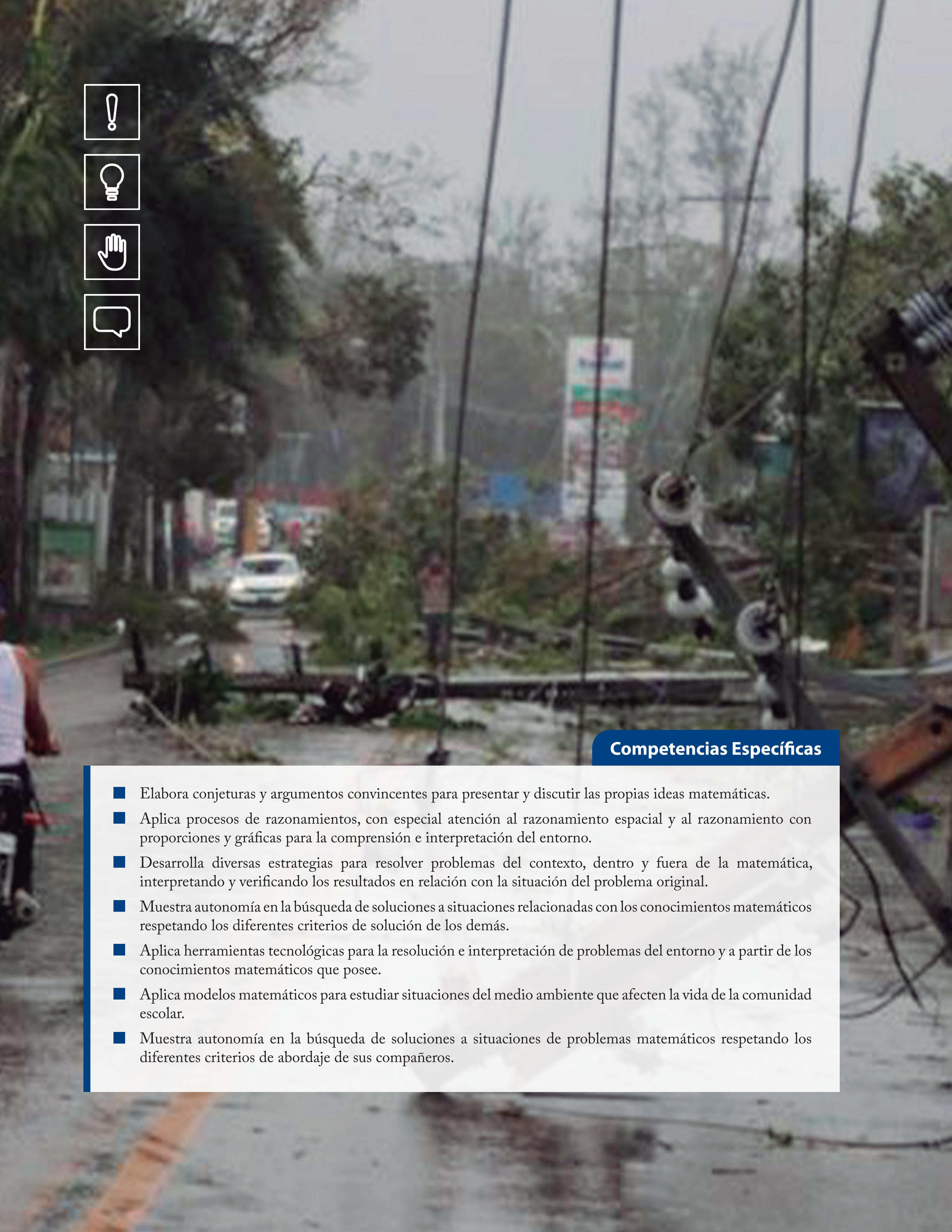
  - Comprueba que esta fórmula se aplica al volumen del cilindro.
  - Comprueba que esta fórmula se aplica al volumen del cono.
  - Comprueba que esta fórmula se aplica al volumen de la esfera.

- **Expresa** el radio de un cono en función del volumen y la altura.

- **Expresa** la altura del cilindro en función del volumen y del área de su base.

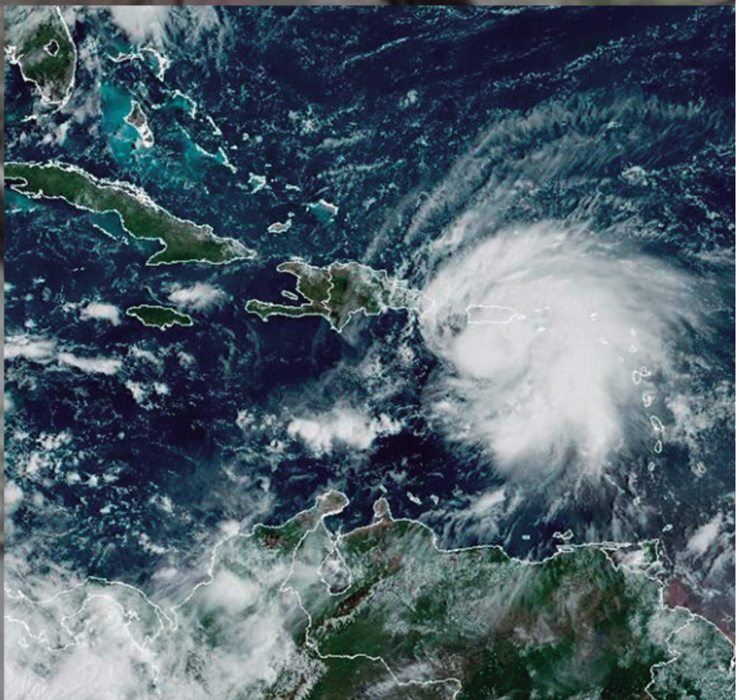
- **Expresa** el radio de la esfera en función de su radio.

- Un cono y un cilindro tienen las áreas de sus bases iguales a 20cm². La altura del cono es de 13cm. La altura del cilindro es el doble de la altura del cono. Halla el volumen del cilindro.



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.



Unidad 11

Estadística

Situación de aprendizaje

La palabra huracán, utilizada en el hemisferio occidental, es de origen taíno y quiere decir centro del viento.

En la mitología maya, *Huracán* fue el dios del fuego, viento y de las tormentas.

La República Dominicana está en el ojo del huracán, así lo evidencia la vulnerabilidad de la isla La Española, que comparte con Haití.

¿Cuáles son los huracanes más dañinos en el siglo XX en República Dominicana?

Contenido

- Medidas de dispersión
- Medidas de posición
- Deciles, cuartiles y quintiles
- Polígonos de frecuencias
- Gráficos circulares
- Actividad grupal
- Evaluación

Las **medidas de dispersión:** son aquellas que indican qué tan dispersos o agrupados están los datos con respecto a su media ($\bar{x}$).

El **rango** indica la amplitud de los datos y se calcula restando al mayor dato del conjunto el menor dato.

La **desviación típica** indica las desviaciones de los datos con respecto a la media, y se calcula de la siguiente forma:

- Calcula la media ($\bar{x}$)
- A cada uno de los datos se le resta la media, esta es la desviación (x_i-$\bar{x}$).
- Eleva al cuadrado cada desviación $(x_i-\bar{x})^2$
- Suma los cuadrados de las desviaciones.
  $\Sigma(x_i-\bar{x})^2$
- Divide esta suma entre el número de datos (***n***) menos uno.
  $\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}$
- Calcula la raíz cuadrada de este cociente.
  $\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}}$

Esta **desviación:** es siempre mayor o igual a cero.

La **varianza** indica la variabilidad de un conjunto de datos con respecto a su media; y se calcula elevando al cuadrado la desviación típica: s^2

La **desviación media** indica la media de los valores absolutos de las desviaciones y se calcula así:

- Calcula las desviaciones de los datos x_i-$\bar{X}$
- Halla el valor absoluto de cada desviación $|x_i-\bar{X}|$
- Suma los valores absolutos de las desviaciones. $\Sigma|x_i-\bar{X}|$
- Divide la suma entre el número de datos. $\frac{\sum|x_i-\bar{x}|}{n}$

Medidas de dispersión

¿Qué indican las medidas de dispersión?

Medidas de dispersión

Cuando estudiamos un conjunto de datos, consideramos las medidas de tendencia central y, para obtener mayor información de los mismos, las **medidas de dispersión**. Por ejemplo, estudiemos los datos de la temporada ciclónica 2021. En esta temporada, se formaron 21 ciclones tropicales nombrados, es decir, 21 tormentas tropicales con vientos superiores a los 63 kilómetros por hora (km/h) de velocidad. Las velocidades alcanzadas por estas tormentas fueron: 72, 104, 72, 72, 136, 104, 200, 120, 240, 72, 96, 200, 72, 120, 72, 80, 80, 240, 72, 104 y 80.

El **rango** de estos datos es de 168 km/h, ya que la mayor velocidad alcanzada por un ciclón fue de 240 km/h y la menor fue de 72 km/h, esto nos indica la amplitud de los datos.

Para **estimar** la variabilidad de los datos calculamos la desviación típica de los mismos, dicha variabilidad se mide con respecto a la media, por lo cual hay que calcularla, que es de 114.67 km/h aproximadamente. La desviación de cada dato, con respecto a la media, está dada en la tabla más adelante; así como el cálculo de la **desviación típica** y la **varianza**.

La media se **denota** con el símbolo $\bar{X}$. En este caso, $\bar{X}$=114.67. Cada dato está identificado como x_i, donde el subíndice «i»indica la posición del dato. La suma de los cuadrados de las desviaciones denotada con el símbolo Σ, es igual a $\Sigma(x_i-\bar{X})^2 \approx 63{,}530.67$.

Como es una población dividen entre 21. Finalmente, la desviación, denotada con σ, es igual a:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_1-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{63{,}530.67}{21}} \approx 55$$

La desviación de los datos con respecto al promedio es de 55 km/h, es decir, la velocidad de los vientos varía en 55 km/h. Por su parte, la varianza, denotada con σ^2, es iguala a $\sigma^2 = 3{,}025$.

Vientos máximos. (km/h)	Desviación $x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$\lvert x_i - \bar{X} \rvert$
72	-42,67	1820,73	42,67
104	-10,67	113,85	10,67
72	-42,67	1820,73	42,67
72	-42,67	1820,73	42,67
136	21,33	454,97	21,33
104	-10,67	113,85	10,67
200	85,33	7281,21	85,33
120	5,33	28,41	5,33
240	125,33	15707,61	125,33
72	-42,67	1820,73	42,67
96	-18,67	348,57	18,67
200	85,33	7281,21	85,33
72	-42,67	1820,73	42,67
120	5,33	28,41	5,33
72	-42,67	1820,73	42,67
80	-34,67	1202,01	34,67
80	-34,67	1202,01	34,67
240	125,33	15707,61	125,33
72	-42,67	1820,73	42,67
104	-10,67	113,85	10,67
80	-34,67	1202,01	34,67

Otra medida de dispersión de los datos, útil para un estudio, es la **desviación media**. En este caso, la desviación media es igual a 43.18 km/h.

$$\frac{\sum \lvert x - \bar{x} \rvert}{n} = \frac{906.69}{21} \approx 43.18$$

- Para estar preparados para los ciclones tropicales necesitamos botas de lluvia. Haz una encuesta en tu salón sobre qué talla de zapatos utilizan tus compañeros; toma por lo menos 20 datos y, con ayuda de Excel, **calcula** la media, el rango, la desviación típica, la varianza y la desviación media.

La **Oficina Nacional de Meteorología de República Dominicana** (Onamet) es un organismo especializado, encargado de brindar servicios meteorológicos a todo el país. Fue fundada en 1954.

El símbolo ∑ representa la suma de un conjunto de datos. A este símbolo también se le conoce con el nombre de **sumatoria**.

La media o promedio es la suma de los datos de un conjunto dividida entre la cantidad de datos.

- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base del razonamiento en resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base de la resolución de problemas asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).

Medidas de posición

Para hallar la medida de posición de un dato x de una muestra cuya media es $\overline{X}$ y con desviación típica σ, se calcula su puntuación *z*:

$$z = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$

¿Cómo se determina la posición de un dato en un conjunto?

Medidas de posición

En algunos estudios de datos interesan ciertos elementos especiales del conjunto, por ejemplo, nos puede interesar qué posición ocupa un dato en el conjunto, para lo que utilizamos la **medida de posición**. Supongamos que queremos saber cómo se posicionaron los ciclones ocurridos en el mes de agosto de 2021, cuyas velocidades de vientos máximos fueron 104, 200 y 120, con respecto a la media. La media de estos datos es $\overline{X}$=114.67 y la desviación típica σ=55, entonces:

Vientos máximos (km/h)	Desviación $x_i - \overline{x}$	z
104	-10,67	-0.19
200	85,33	1.56
120	5,33	0.10

La puntuación negativa **indica** que el ciclón de 104 km/h estuvo por debajo de la media. La puntuación de 1.56, que es mayor a 0.10, indica que el ciclón de vientos máximos a 200 km/h quedó situado por encima del de 120 km/h.

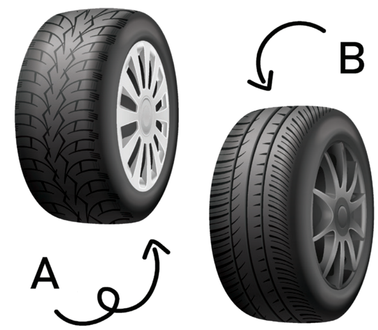
Posición relativa en un comité de apoyo

En la escuela se han creado comités de apoyo para las personas afectadas por los huracanes. Con el propósito de incentivar la participación de las personas, por cada acción de apoyo que ellas llevan a cabo van sumando puntos que al final del año escolar cambian por libros en una prestigiosa librería. Dos amigas, Ana y Beatriz, que pertenecen a dos comités distintos, obtuvieron la primera 85 puntos mientras que la segunda obtuvo 76. ¿Cuál de las dos hizo una mejor labor en su comité, tomando como base los datos que se muestran a continuación?

	Ana	Beatriz
Media del comité	**72**	**66**
Desviación estándar del comité	**8**	**5**

Para Ana: $z = \frac{85 - 72}{8} \approx 1.63$ Para Beatriz: $z = \frac{76 - 66}{5} = 2$

Como la puntuación z de Beatriz es mayor, esta hizo una mejor labor dentro de su comité que aquella que hizo Ana en el suyo.



Fuente: Freepik

Vida útil de una goma

Observa las medidas relativas a la vida útil de dos tipos de gomas, de dos marcas distintas, utilizadas por dos personas.

	Goma A	Goma B
Duración de la goma (km)	59,546	56,327
Media de vida de la goma en km	72,420	61,155
Desviación estándar de la goma	7,242	3,347

¿Cuál goma tuvo el mejor rendimiento?

Goma A: $z = \frac{59{,}546 - 72{,}420}{7{,}242} \approx -1.78$

Goma B: $z = \frac{56{,}327 - 61{,}155}{7{,}242} \approx -1.44$

La goma que tuvo mejor rendimiento fue la goma A pues su puntuación es superior a la de la goma B.

- En una competencia de atletismo, Carlos, deportista de salto de altura, saltó 1.89m. Las marcas para este género de salto tuvieron una media de 1.82m y una desviación típica de 0.08m. David, un compañero de Carlos, en otra competencia de la misma temporada, hizo un salto de 5.58 m. En esa competencia, la media fue de 5.02m y la desviación típica 0.55m. ¿Quién tuvo mejor rendimiento en la temporada?

- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base del razonamiento en resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base de la resolución de problemas asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).

Deciles, quintiles y cuartiles

Los **deciles** son los nueve valores que dividen un conjunto de datos en diez partes, aproximadamente iguales. Se denotan D_1, D_2, …, D_9.

Los **quintiles** son los cuatro valores que dividen un conjunto de datos en cinco partes, aproximadamente iguales. Se denotan K_1, K_2, K_3 y K_4.

Los **cuartiles** son los tres valores que dividen un conjunto de datos en cuatro partes, aproximadamente iguales. Se denotan Q_1, Q_2 y Q_3.

D_2 coincide con K_1

D_4 coincide con K_2

D_6 coincide con K_3

D_8 coincide con K_4

¿Qué otras medidas de posición existen?

Existen otras medidas de posición llamadas **deciles**, **quintiles** y **cuartiles**. Estas medidas nos permiten ubicar datos particulares dentro de ciertas porciones de una distribución.

Observemos la siguiente tabla de frecuencias con el tiempo que dedican al estudio diariamente, 50 estudiantes de 2º año.

Tiempo (minutos)	Frecuencia	Frecuencia acumulada	% acumulado
[60, 70)	2	2	4
[70,80)	1	3	6
[80, 90)	3	6	12
[90,100)	2	8	16
[100, 110)	10	18	**36**
[110,120)	5	23	46
[120, 130)	10	33	**66**
[130,140)	7	40	80
[140,150)	4	44	88
[150,160)	6	50	100

Calculemos los tiempos correspondientes al séptimo decil (D_7), el segundo quintil (K_2) y el tercer cuartil (Q_3):

D_7 es aquel que acumula el **70 %** de los tiempos, el porcentaje acumulado más cercano a 70 es 66, que le corresponde los tiempos entre 120 y 130 minutos.

K_2 es aquel que acumula el **40 %** de los tiempos, el porcentaje acumulado más cercano a 40 es 36, que le corresponde los tiempos entre 100 y 110 minutos.

Para **hallar** Q_3 tenemos que ordenar los datos de manera diferente, veamos.

Tiempo (minutos)	Frecuencia	Frecuencia acumulada	% acumulado
[60, 85)	4	4	8
[85, 110)	14	18	36
[110,135)	18	36	**72**
[135,160)	14	50	100

Q_3 es aquel que acumula el 75 % de los tiempos, el porcentaje acumulado más cercano a 75 es 72, que corresponde a los tiempos entre 110 y 135 minutos.

Ana está en el Q_2 y Beatriz en el K_2, ¿quién dedicará más minutos al estudio?

El Q_2 es el que acumula el 50 % de los datos, en este caso, 36 es el número más cercano a 50, es decir, que Ana estudia entre 85 y 110 minutos. Mientras que Beatriz, en el K_2, está entre 100 y 110 minutos. En conclusión, no puede decirse con certeza quién estudia más tiempo de las dos.

Si Andrés quiere estar por encima del cuartil superior del 2º año, ¿cuánto tiempo debe estudiar diariamente?

El cuartil superior es el tercer cuartil (Q_3), es decir, el que acumula 75 % de los datos, en este caso el valor más cercano a 75 es 72. De manera que, si Andrés quiere estar por encima del 72 % de sus compañeros, deberá estudiar entre 135 y 160 minutos diariamente.

- **Pregunta** a tus compañeros de clase cuántos minutos diarios dedican a alguna actividad física. **Registra** los datos en una tabla de frecuencias y calcula los cuartiles.

  ¿En qué cuartil te ubicas tú? Reflexiona al respecto.

- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base del razonamiento en resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base de la resolución de problemas asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).

Polígonos de frecuencias

Un **polígono de frecuencias:** es un tipo de gráfico estadístico en el que se representa el conjunto de datos mediante puntos y se unen con líneas.

En estadística, el polígono de frecuencias normalmente sirve para representar una serie temporal. Este tipo de diagramas es muy útil para analizar la evolución de los datos.

¿Cómo organizamos y representamos los datos de un estudio estadístico?

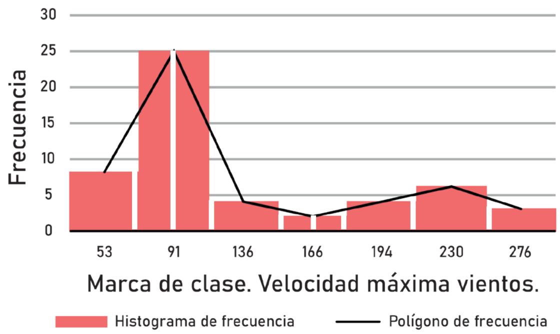
Para representar los resultados de un estudio estadístico existen varios tipos de gráficos. Ya conocemos el histograma que sirve para representar un gran número de datos de forma agrupada, en clases, y determinar el número de datos que pertenecen a cada clase, es decir, su frecuencia. Cada clase tendrá una media que la representa y al unir esas medias obtenemos el **polígono de frecuencias**.

Por ejemplo, en la siguiente tabla está una parte de los datos de un estudio hecho por el Ministerio de Agricultura sobre los ciclones que han impactado a la República Dominicana desde 1960 hasta 2021. En ese estudio, los ciclones se clasificaron en depresión tropical, tormenta tropical, huracán y gran huracán, para lo cual se hizo una subclasificación ficticia de la categoría huracán y de gran huracán, para obtener más clases de huracanes y poder visualizar mejor el polígono de frecuencias.

Ciclones nombrados	Vientos máximos (km/h)	Entre 1960 y 2021
Depresión Tropical	43 a 63	8
Tormenta Tropical	64 a 118	25
Huracán (Categoría 1)	119 a 153	4
Huracán (Categoría 2)	154 a 178	2
Gran huracán (Categoría 3)	179 a 209	4
Gran huracán (Categoría 4)	210 a 250	6
Gran huracán (Categoría 5)	251 a 301	3
	TOTAL	**52**

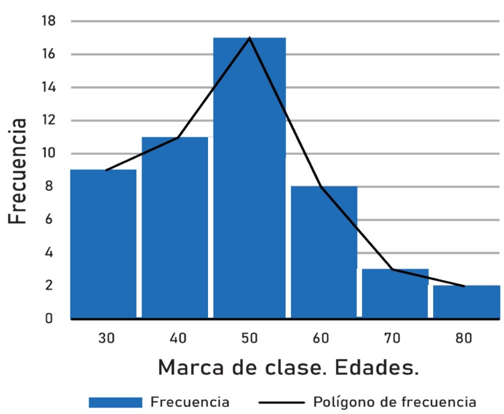
Un histograma es una representación gráfica de la distribución de frecuencias de un conjunto de datos numéricos. En el eje horizontal se colocan los valores del conjunto de datos divididos en intervalos, llamados «clases», y en el eje vertical se representa el número de veces que cada valor aparece en cada clase, es decir, su frecuencia.

Los datos extremos 43km/h y 301km/h son supuestos, solo para un correcto manejo del programa Excel, con el cual se hizo el gráfico. La marca de clase es la media de cada clase que sirve de referencia. Observemos la siguiente gráfica.



Con esta gráfica se concluye que la mayor frecuencia de ciclones que afecta al país es del tipo tormenta tropical, caracterizado por vientos máximos entre 64 y 118km/h.

En una encuesta realizada a 50 personas entre 25 y 85 años, se preguntó si habían sido afectadas por las tormentas tropicales. El resultado se muestra en el siguiente gráfico de polígono de frecuencias. Del mismo, se concluye que las personas que han sido más afectadas por las tormentas son las que tienen alrededor de 50 años.



Coevaluación

- **Realiza** una encuesta en tu familia y a tus vecinos para determinar quiénes han participado en algún plan de contingencia para huracanes. **Clasifica** los datos en intervalos según las edades de las personas, registra los datos en una tabla de frecuencias, realiza un histograma y un polígono de frecuencias. **Escribe** tus conclusiones, compártelas con tus compañeros de clase y escriban una conclusión grupal.

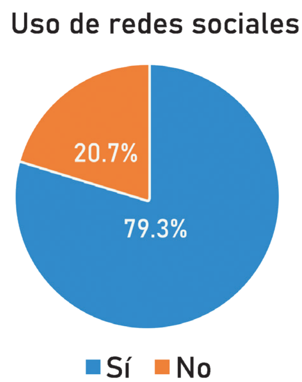
- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base del razonamiento en resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base de la resolución de problemas asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).

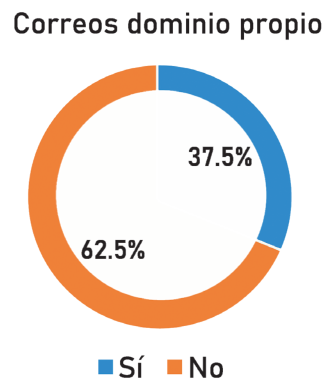
Gráficos circulares

¿Cómo organizamos y representamos los datos de un estudio estadístico?

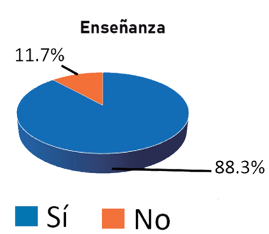
Un gráfico circular es un círculo que se utiliza para representar la proporción de datos de cada uno de los valores a considerar.

Para representar los resultados de un estudio estadístico existen varios tipos de gráficos, uno de ellos son los gráficos circulares. Estos gráficos nos sirven para representar los datos agrupados en categorías distintas entre sí y mostrar las proporciones de un total. El caso más sencillo es para representar respuestas del tipo Sí/No. Por ejemplo, según un estudio hecho por la ONE en 2021, sobre el uso de las redes sociales por las empresas de República Dominicana, los datos arrojaron que el 79.3 % de las empresas sí las usan, mientras que el 20.7% no las usan. Los datos también arrojaron que solo un 37.5 % de las empresas cuentan con correo electrónico de dominio propio. Esta información la podemos graficar así:





Observa que existen distintos tipos de gráficos circulares, que puedes diseñar utilizando Excel, con la herramienta de **Gráficos** que se despliega al seleccionar la pestaña de **Insertar**. El del lado izquierdo es un **Gráfico 2D** y el de la derecha es de «**Anillos**». Existe un tercer tipo llamado **Gráfico circular 3D**, como el que se muestra continuación, para responder a la pregunta sobre el uso de las redes sociales por parte de empresas educativas.



De la observación de este gráfico concluimos que el 88.3 % de las empresas educativas sí usan las redes sociales para promocionarse, mientras que 11.7 % no las usan.

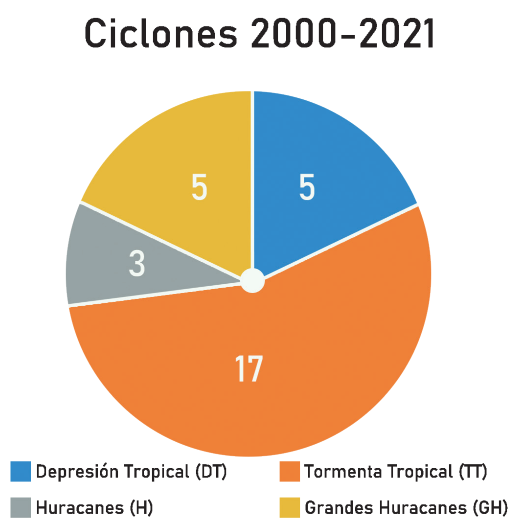
Cómo hacer un gráfico circular en Excel. Curso de Gráficos en Excel.

En este video observarás cómo construir un gráfico circular utilizando Excel.

Observa los datos acerca de los ciclones tropicales ocurridos entre los años 2000 y 2021 en la República Dominicana.

Ciclones nombrados	Entre 2000 y 2021
Depresión Tropical (DT)	5
Tormenta tropical (TT)	17
Huracanes (H) (categoría 1 y 2)	3
Grandes huracanes (GH) (categorías 3 a5)	5
TOTAL	30

Al ingresar estos datos en una hoja de cálculo de Excel obtenemos el siguiente gráfico:



Al observar el gráfico, concluimos que la mayoría de los ciclones ocurridos en este período fueron del tipo tormentas tropicales.

- **Haz** una encuesta en tu aula sobre cuál es la red social preferida de tus compañeros y con qué fines la utilizan. Algunos fines pueden ser recreativos, de compras, educativos, deportivos o artísticos. **Grafica** los resultados con gráficos circulares.

- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base del razonamiento en resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base de la resolución de problemas asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).

Actividad grupal

Planificación de una kermés escolar

¿Qué haremos?

Organizaremos una kermés escolar para recoger fondos para las personas afectadas por los huracanes o para cualquier otro proyecto escolar. Las estadísticas nos ayudarán a predecir cuáles serán las comidas más vendidas durante la kermés.

¿Qué necesitamos?

Cuaderno, lápiz y una computadora con el programa Excel.

¿Cómo nos organizamos?

Formamos equipos de cuatro compañeros. Cada equipo decidirá qué tipo de comida planificará vender en la kermés (platos principales, postres, bebidas u otros) Para ello, pueden consultar el recetario de comida dominicana que se encuentra en: https://www.cocinadominicana.com/

¿Cómo lo haremos?

Para decidir cómo planificarán la kermés, realizarán una encuesta en la escuela con ayuda del docente; una encuesta de selección simple para una muestra significativa de estudiantes. Los resultados de la encuesta ayudarán a conocer cuáles son las comidas preferidas de la comunidad escolar y, en consecuencia, predecirá cuáles serán las más vendidas.

En primer lugar, en su aula, **discutirán** acerca de las preferencias de comidas y elegirán cinco platos de cada tipo. Los platos serán aquellos que ustedes piensen que son los favoritos de sus compañeros. Luego, diseñan la encuesta, en la que preguntarán cuál de esas comidas es la favorita para cada tipo. La encuesta debe tener tantas preguntas como tipos de comida (platos principales, acompañantes, postres, bebidas).

Aplican la encuesta en la escuela en un solo día, coordinando con los docentes. Registran los datos y los ingresan a una hoja de cálculo en Excel. Los datos los registrarán en tablas según el tipo de comida y los representan con gráficos circulares sobre cada grupo de comida.

A continuación, un ejemplo de tabla:

Postres preferidos	Cantidad personas
Habichuelas con dulce	
Tres leches	
Pudín de pan	
Flan de auyama	
Majarete	
TOTAL	

Con el programa Excel puedes hacer cálculos con muchos datos de manera rápida y así enfocarte en la comprensión de los resultados para sacar conclusiones.

Presentación y socialización de las actividades

Cada grupo presentará su estudio estadístico, que incluye las tablas, los gráficos y las conclusiones escritas en oraciones. También pueden incluir imágenes de las diferentes comidas.

Coevaluación

Escribe qué observaste sobre los resultados del estudio estadístico llevado a cabo por tus compañeros. ¿Qué opinas sobre los resultados? ¿Cómo te ayudaron los gráficos a comprender los resultados? ¿Cómo fue la experiencia con el manejo del Excel?

Autoevaluación

Escribe una reflexión sobre el estudio de los datos para organizar la kermés. ¿Qué aprendiste sobre el uso de las estadísticas? ¿Cómo fue tu experiencia con el manejo del Excel? ¿Qué dificultades tuviste? ¿Qué preguntas te quedaron por responder?

- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base del razonamiento en resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).
- Toma decisiones sobre la base de la resolución de problemas asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados, representándolos en gráficos estadísticos (diagramas de árbol, circulares y polígonos de frecuencia).

Evaluación

- A continuación, se presentan 23 datos del crecimiento anual, en centímetros, de árboles de caoba sembrados en una zona afectada por los ciclones:

  25, 22, 26, 26, 22, 28, 23, 22, 24, 27, 27, 24, 24, 23, 26, 25, 29, 27, 28, 25, 26, 22, 23

  La media de estos datos es 24cm.

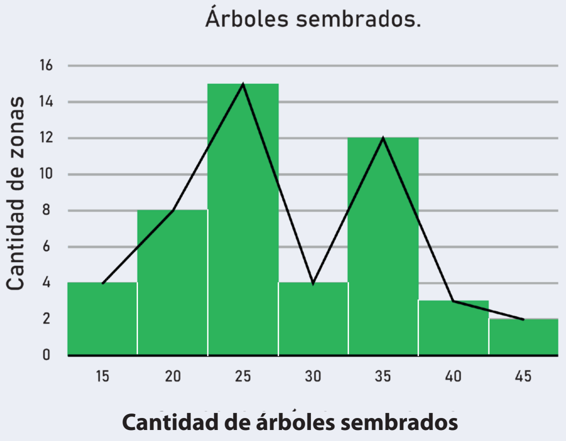
  - **Calcula** el rango y la desviación típica, dibuja el histograma y el polígono de frecuencias.
  - En otra zona reforestada, donde también se sembraron árboles de caoba, la media de crecimiento anual de los árboles es de 23cm y la desviación típica de 2.54 cm. Si un árbol de esta zona creció en un año 28 cm y un árbol de la zona planteada en la pregunta 1 creció 27cm, ¿cuál de los dos obtuvo mejor posición en su zona con respecto a su crecimiento?
  - ¿Cuántos árboles de los sembrados en la pregunta 1 se encuentran por encima del cuartil superior?
  - ¿Cuántos árboles de los sembrados en la pregunta 1 se encuentran por debajo del cuartil inferior?
  - ¿Cuántos árboles de los sembrados en la pregunta 1 se encuentran entre Q_2 y Q_3?

- En la siguiente tabla están registrados 50 datos del crecimiento anual en centímetros de árboles de ceiba, sembrados en zonas reforestadas. La frecuencia se denota (f) y la frecuencia acumulada (F). El porcentaje (%) es acumulado. **Responde** las preguntas referentes a la siguiente tabla.

Crecimiento (cm)	F	F	%
1	2	2	4
1.1	2	4	8
1.2	6	10	20
1.3	8	18	36
1.4	5	23	46
1.5	8	31	62
1.6	5	36	72
1.7	7	43	86
1.8	5	48	96
1.9	2	50	100

- **Halla** el crecimiento correspondiente al decil.
- Si no lo encuentras exactamente, aproxímalo.
- Si una ceiba creció 1.3cm, ¿en qué decil se encuentra?
- Si una ceiba creció 1.5cm, ¿en qué quintil se encuentra?
- Representa los datos en un polígono de frecuencias.

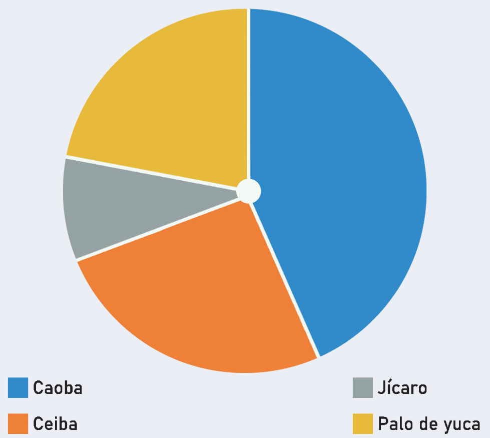
En el siguiente polígono de frecuencias, se registra la cantidad de árboles sembrados en una campaña de reforestación en distintas zonas del país. **Responde** las preguntas, referentes al gráfico.



- ¿Cuál fue la mayor cantidad de árboles sembrados?
- ¿Cuántas zonas sembraron 25 árboles?
- ¿Cuántas zonas sembraron la menor cantidad de árboles y cuántas la mayor cantidad?

- En el siguiente gráfico circular, se muestran los resultados de una encuesta sobre las preferencias personales de árboles dominicanos. **Escribe** los nombres de los árboles ordenados según estos resultados.

Árboles dominicanos

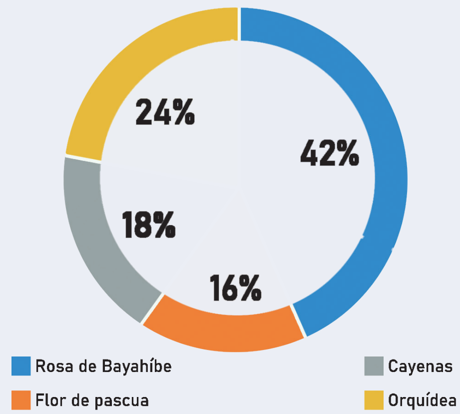


- **Representa** en un gráfico circular los resultados de una encuesta realizada para saber los destinos turísticos preferidos de un grupo de 60 personas, que se muestra en la siguiente tabla.

Destino turístico	Frecuencia
Punta Cana	18
Península de Samaná	12
Santo Domingo	12
Puerto Plata	8
Isla Saona	10
TOTAL	**60**

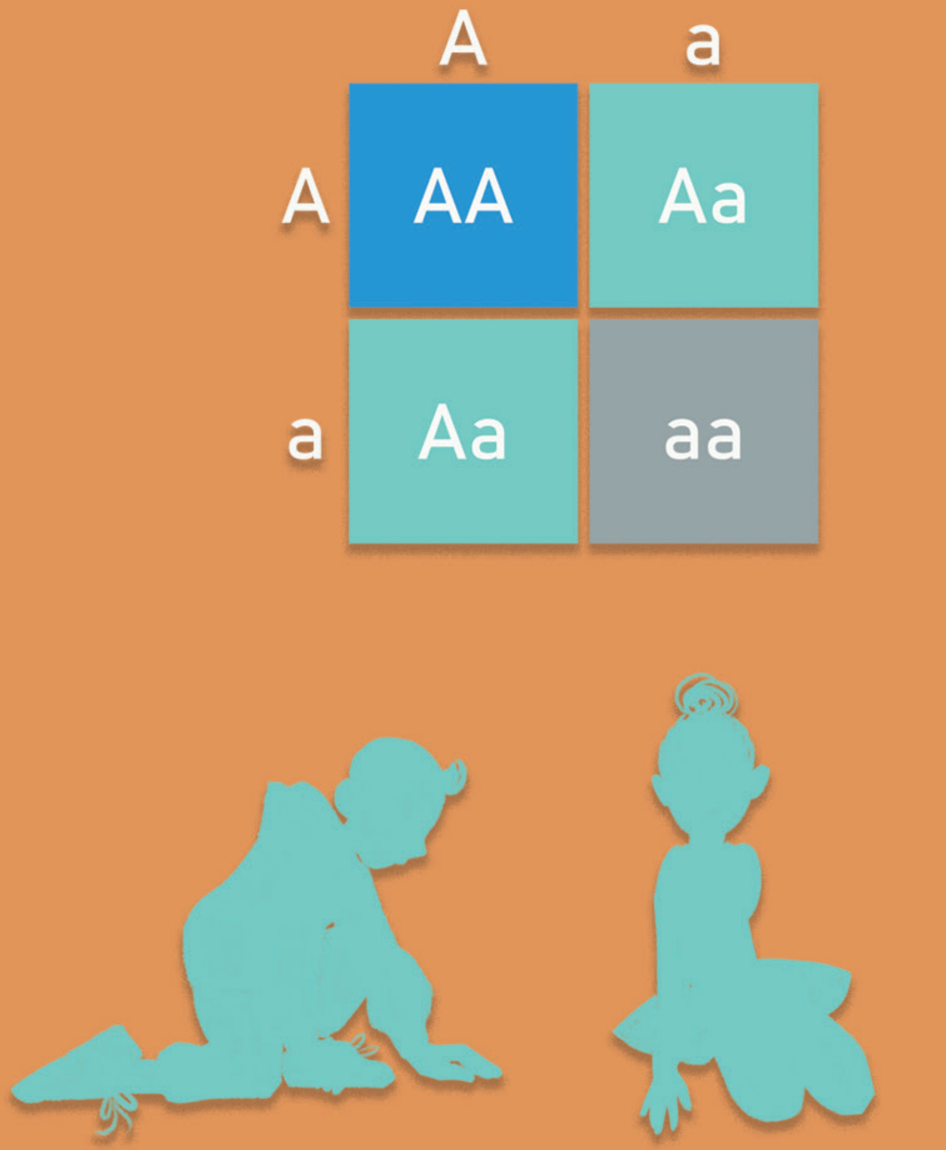
- En el siguiente gráfico circular se muestran los resultados de una encuesta hecha a 50 personas, sobre sus preferencias de flores dominicanas. ¿Cuántas personas prefieren cada una de las flores?

Flores dominicanas



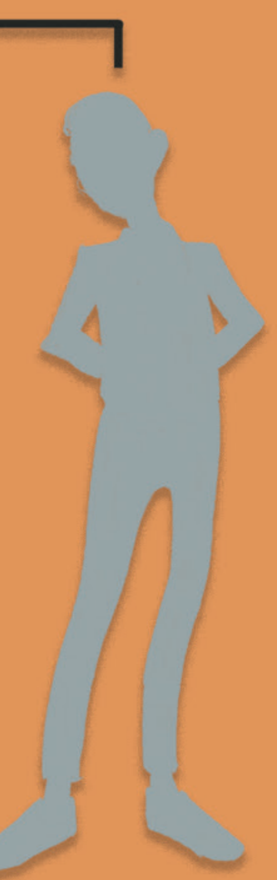
- Según la página Datosmacro.com, los emigrantes de República Dominicana viajan principalmente a Estados Unidos, en un 72.59 %, seguido por España, el 11.49 %, y a Italia en un 2.99 %. **Representa** estos datos en un gráfico circular.

- En esta unidad he tenido dificultades para comprender los siguientes temas…
- Necesito consultar más información sobre estos conceptos…
- El ejercicio que tengo que hacer de nuevo para repasarlo bien es el siguiente...
- El tema que puedo aplicar en distintas situaciones de mi vida cotidiana (en casa y en la escuela) se titula…
- El tema de esta unidad que más me ha gustado se titula…



Competencias Específicas

- Elabora conjeturas y argumentos convincentes para presentar y discutir las propias ideas matemáticas.
- Aplica procesos de razonamientos, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas para la comprensión e interpretación del entorno.
- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos respetando los diferentes criterios de solución de los demás.
- Aplica herramientas tecnológicas para la resolución e interpretación de problemas del entorno y a partir de los conocimientos matemáticos que posee.
- Aplica modelos matemáticos para estudiar situaciones del medio ambiente que afecten la vida de la comunidad escolar.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.



Unidad 12

Probabilidad

Situación de aprendizaje

El genetista inglés Reginald Punnett (1875-1967) inventó, a comienzos del siglo XX, una técnica para calcular la probabilidad de que los hijos de una pareja hereden características particulares. Esta técnica es conocida como la tabla de Punnett. Se trata de una manera gráfica y sencilla de descubrir todas las combinaciones posibles de los genotipos que pueden ocurrir en los hijos, dados los genotipos de sus padres.

En la tabla de Punnett (en la figura), se muestra una pareja con los factores: dominante (A) y recesivo (a), y las posibles combinaciones en sus descendientes: AA (sano), Aa (portador sano) y aa (enfermo)

¿Cuál es la probabilidad de tener un hijo sano?

¿Cuál es la probabilidad de tener un hijo sano y portador de la enfermedad?

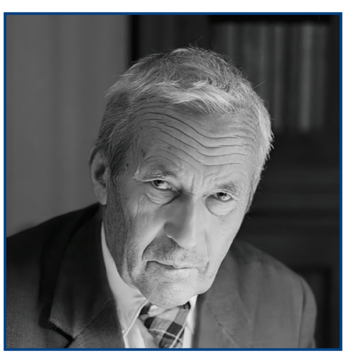
¿Cuál es la probabilidad de tener un hijo enfermo?

Contenido

- Introducción a la probabilidad
- Experimentos aleatorios simples
- Experimentos aleatorios compuestos
- Números aleatorios
- Espacio muestral
- Actividad grupal
- Evaluación

Un tipo de juego de dados lo jugaban los incas, en Suramérica, antes de la llegada de los españoles. Los incas usaban unos tipos de dados muy particulares.

El matemático ruso **Andréi Kolmogorov** (1903-1987) fue el que formuló la concepción axiomática de la probabilidad.



Fuente: revista2c.com

Introducción a la probabilidad

En la vida diaria encontramos diferentes tipos de situaciones, en algunas podemos predecir sus resultados y en otras, eso no es posible. Menciona dos ejemplos de situaciones en las que no sea posible predecir con exactitud sus resultados.

Si bien la teoría de la probabilidad fue desarrollada en el siglo XVII, los seres humanos han tratado con la incertidumbre desde hace muchos siglos atrás. Las primeras nociones de probabilidad aparecieron al valorar situaciones de riesgo, como en el caso de los viajes por barco en alta mar entre Europa y América. También aparecieron formas de pensamiento probabilístico en los juegos en los que interviene el azar, tales como los juegos de cartas, las ruletas y los juegos con dados.

Hay varias maneras de definir la probabilidad. Existen cuatro definiciones básicas de probabilidad: 1) clásica, 2) frecuencia relativa, 3) axiomática y 4) subjetiva. La definición básica se basa en el conteo del número total (N) de todos los posibles resultados de una situación o problema y suponemos que algunos de esos resultados en particular ocurren un número determinado de veces (n). Entonces, se dice que la probabilidad de ocurrencia de esos resultados particulares es igual a n/N.

La concepción frecuentista se basa en la misma idea, pero los números n y N se obtienen de la experimentación. Es decir, estos números se hallan después de realizar un gran número de veces el mismo proceso, como, por ejemplo, lanzar un dado. Se asume que si se quiere saber cuál es la probabilidad de sacar un 5, lanzamos el dado una gran cantidad de veces (N) y contamos el número de veces (n) que sale el 5, entonces el cociente n/N se acerca a la probabilidad de sacar el 5. Mientras mayor sea el número de veces que lancemos el dado, mejor será la aproximación que obtenemos de la probabilidad de sacar un número determinado.

En la probabilidad desde el enfoque axiomático se postula que la ocurrencia de un resultado es un número real entre 0 y 1. La probabilidad de que un resultado siempre ocurra (sea cierto) es igual a 1. Ya la probabilidad de resultados excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de esos eventos. Las probabilidades se pueden expresar en forma de fracción, como un número decimal o como un porcentaje. Por ejemplo, la probabilidad de sacar cara al lanzar una moneda se puede expresar como $\frac{1}{2}$, como 0.5 o como 50 %. La probabilidad también se puede evaluar en forma geométrica.

Probabilidad subjetiva

En la vida diaria nos encontramos con situaciones que no son repetibles, que no son igualmente probables y que su ocurrencia no la podemos predecir antes de que suceda. Situaciones como esas se dan en los deportes. Por ejemplo, en un juego entre los Tigres de Licey y los Gigantes del Cibao asumimos que solo hay dos posibilidades: que ganen los Tigres o que ganen los Gigantes. Sin embargo, aunque hay dos resultados posibles no se puede decir que la probabilidad de que gane uno de ellos es $\frac{1}{2}$. No podemos decir que ambos tienen la misma probabilidad de ganar. Seguramente que los fanáticos de cada equipo le asignarán una probabilidad muy diferente a cada resultado. Se trata más bien de «un grado de creencia»en el que un evento pueda ocurrir, pero, otro asunto es transformar esa creencia en una probabilidad.

Dos agricultores discuten acerca de la posibilidad de cultivar aguacates en un terreno determinado. Uno de ellos opina que hay un 70 % de posibilidad de cultivar aguacates y el otro opina que hay un 30 % de cultivarlos en ese terreno. Podemos plantear ese problema en términos de una apuesta, donde el primer agricultor estaría dispuesto a apostar 7 a 3 a que se puede cultivar y el segundo 3 a 2. Las probabilidades subjetivas de la opción de cada agricultor se pueden calcular en cada caso como:

$$P(A) = \frac{7}{(7+3)} = \frac{7}{10} = 0.7 \text{ y } P(B) = \frac{3}{(3+2)} = \frac{3}{5} = 0.6$$

En general, se tiene que la probabilidad de las apuestas a favor de un resultado determinado son de *r* a *s*, la probabilidad subjetiva de este resultado es igual a: $\frac{r}{(n+s)}$.

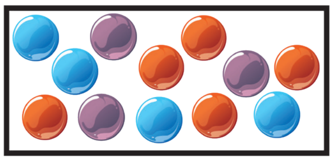
- Para un partido entre las Estrellas Orientales y Tigres del Licey, María opina que los Tigres tienen un chance del 41 % de ganar y Juan opina que las Estrellas tienen una probabilidad de ganar del 59 %. **Expresa** en términos de probabilidad subjetiva, la probabilidad de ganar de cada equipo si mamá está dispuesta a apostar 5 a 2 y Juan 8 a 3.

El matemático italiano **De Finetti** (1906-1985) fue uno de los desarrolladores de la concepción subjetiva de la probabilidad.

Fuente:estadisticamigable.blogspot.com

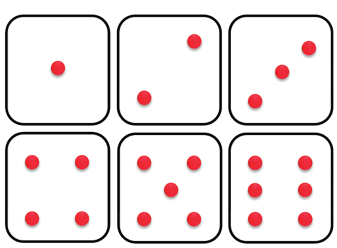
- Modela aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos de experimentos aleatorios simples, algebraicos, geométricos y estadísticos.

La frecuencia relativa de un dato o resultado es el cociente de su frecuencia absoluta entre el total de datos o resultados en la población. Por ejemplo, en una caja hay 12 bolas de tres colores diferentes: 5 rojas, 4 azules y 3 moradas.



La frecuencia absoluta de las bolas rojas es 5. La frecuencia relativa de las bolitas rojas (respecto al todo) es: $\frac{5}{12}$.

Cuando se lanza un dado, solo se obtienen seis posibles resultados diferentes.



Experimentos aleatorios simples

Realizamos el experimento aleatorio al lanzar una moneda hacia arriba y que caiga sobre la superficie de una mesa. ¿Cuántos resultados posibles produce este experimento?

Un experimento aleatorio es un experimento que se realiza una gran cantidad de veces y la ocurrencia de sus resultados no puede ser conocida antes de realizarlo. Todos los resultados del experimento tienen la misma posibilidad de ocurrir. Los juegos en los que interviene el azar son ejemplos de experimentos aleatorios.

Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda es un experimento aleatorio. Sabemos que este experimento tiene dos resultados posibles, cara o cruz. Sin embargo, no podemos predecir cuál de esos resultados se obtendrá en cada ensayo.

Realizamos de manera repetida el experimento de lanzar un dado 20 veces y registramos el número que aparezca en la cara superior del dado. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en cada una de las cuatro veces que se repitió el experimento.

Experimento 1 1 4 5 6 5 4 5 6 5 5 1 6 4 3 6 2 5 2 4 5

Experimento 2 3 6 2 4 2 1 2 1 3 5 1 3 3 5 5 5 5 1 5 3

Experimento 3 1 1 5 2 1 6 6 1 5 2 1 2 6 4 2 1 5 2 5 4

Experimento 4 3 2 1 2 3 2 2 6 3 3 2 3 1 5 3 6 1 2 5 6

Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y registra el número de veces que apareció cada número en cada uno de los experimentos.

	Experimento 1	Experimento 2	Experimento 3	Experimento 4
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Cada experimento se realizó 20 veces. Podemos calcular la razón de ocurrencia de cada resultado sobre el número total de resultados. Por ejemplo, en el experimento 1 el número 5 apareció 7 veces de 20 ensayos. Su razón de ocurrencia es $\frac{7}{20} = 0.35$. En el experimento 3, el resultado 6 ocurrió 3 veces de 20, su razón de ocurrencia es $\frac{3}{20} = 0.15$. La razón de ocurrencia se conoce con el nombre de **frecuencia relativa**.

El símbolo «≈»se lee «aproximadamente igual a». Este símbolo se usa cuando escribimos el valor aproximado de una cierta operación.

Calcule la razón de ocurrencia de cada resultado, en cada uno de los experimentos, y compáralas entre ellas. ¿Cuál de todas las razones de ocurrencia es la mayor?, ¿cuál es la menor?

Podemos calcular la probabilidad de cada uno de los resultados obtenidos en el experimento aleatorio de lanzar un dado. En este caso tenemos que el espacio muestral es igual al conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}, que tiene 6 elementos. La probabilidad de obtener cualquiera de los seis resultados es $P = \frac{1}{6} \approx 0.17$. Compara esta probabilidad con las razones de ocurrencia que calculaste en los experimentos anteriores.

Realiza un experimento para determinar la probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado. Recuerda que hay que hallar el conjunto de todos los resultados posibles para determinar su número y el número de veces que ocurre el resultado deseado, en este caso sacar un número impar. Repite el experimento 30 veces. Haz una lista con todos los resultados obtenidos y resalta con un color los resultados impares. **Cuenta** el número total de resultados y el número de veces que aparecen los números impares. ¿Cuáles números enteros entre 1 y 6 son impares?

La proporción de ocurrencia de un resultado también se puede expresar como un porcentaje. Si la razón de ocurrencia de un resultado es $\frac{1}{4}$, se puede expresar como 25 %.

- **Realiza** el experimento de lanzar una moneda. Repite este experimento 20 veces y registra cada uno de los resultados. Calcula la razón de ocurrencia de sacar cada lado. Repite el experimento 50 veces. **Calcula** la razón de ocurrencia de sacar cada lado. Compara estos resultados. ¿En cuál de los dos experimentos, las razones de ocurrencia se aproximan más a 0.5? Explica tu respuesta.

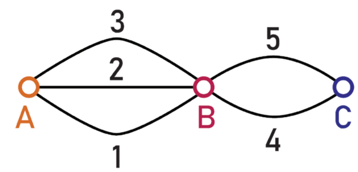
- Modela aplicando el pensamiento lógico, situaciones del contexto a partir de los conceptos de experimentos aleatorios simples, algebraicos, geométricos y estadísticos.

Aa

Un **diagrama de árbol:** es un tipo de representación gráfica que se usa en las ciencias matemáticas para hallar el número total de resultados de un experimento o de un problema y mostrar cada uno de esos resultados de manera ordenada.

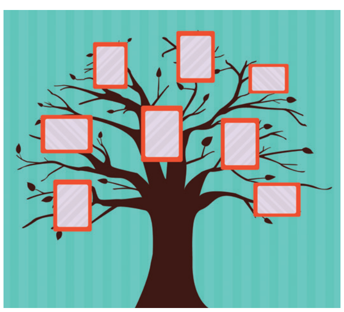
Experimentos aleatorios compuestos

Tenemos tres ciudades: A, B y C. Entre las ciudades A y B hay tres caminos diferentes. Entre las ciudades B y C hay dos caminos diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir desde la ciudad A hasta la ciudad C?



Un experimento aleatorio compuesto es un experimento formado por dos o más experimentos aleatorios simples que se realizan de manera consecutiva. Lanzar una moneda o un dado son experimentos aleatorios simples. Un ejemplo de experimento aleatorio compuesto es el experimentoen el que se lanza primero una moneda y luego se lanza un dado.

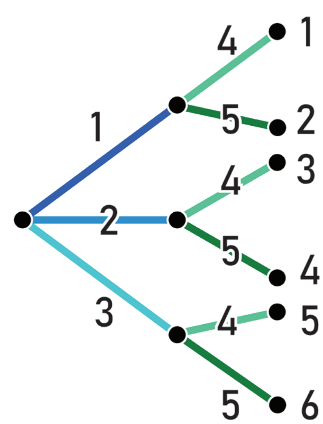
La idea del diagrama de árbol fue tomada de la manera en que suelen distribuirse las ramas de un árbol real.



Fuente: Freepik.com

Diagrama de árbol

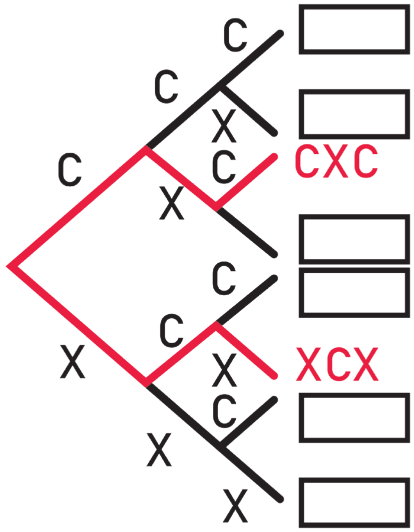
Para **calcular** la probabilidad de ocurrencia de un suceso en un experimento compuesto es muy importante contar correctamente el número total de caso probables. Una técnica que se usa para este propósito es el **diagrama de árbol**. Tomemos como ejemplo el problema propuesto al comienzo de esta lección. Con la ayuda de un diagrama de árbol, podemos hallar todas las maneras posibles de ir desde A hasta C. Para cada camino de A hasta B (1, 2 y 3) tenemos para escoger dos opciones desde B hasta C (4 y 5), tal como se muestra en el diagrama. Entonces tenemos un total de seis maneras diferentes para ir desde A hasta C.



Para dibujar un diagrama de árbol de un experimento aleatorio compuesto, se hallan primero los posibles resultados de cada uno de los experimentos simples que lo componen, en el orden en que se realizan. Se dibujan tantas ramas del árbol como resultados posibles tenga el primer experimento simple. En el terminal de cada una de estas ramas se dibujan ramas correspondientes a cada resultado posible en el segundo experimento simple y así sucesivamente.

Número de resultados de un experimento aleatorio compuesto

Todos los resultados posibles del experimento aleatorio compuesto lanzar tres monedas consecutivamente, se pueden contar usando un diagrama de árbol como el que se muestran a continuación, tomando en cuenta que cada experimento simple tiene por resultados cara (C) y sello (X). Copia este diagrama de árbol en tu cuaderno y completa en los recuadros los resultados que faltan.



¿Cuántos resultados posibles conforman este experimento aleatorio compuesto?

Este experimento aleatorio compuesto está formado por tres experimentos simples, cada uno de estos experimentos tiene dos resultados posibles. Se tiene que el número de resultados posibles del experimento compuesto anterior es igual a: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. ¿Coincide este resultado con el obtenido mediante conteo, usando el diagrama de árbol?

Los árboles han servido de inspiración por cientos de años para el diseño de representaciones de información.

- **Usa** un diagrama de árbol para determinar la probabilidad de obtener dos caras y una cruz en el experimento aleatorio lanzar tres monedas de manera consecutiva.

- Expresa a partir de ideas matemáticas resultados de investigación asociados a los conocimientos de estadística y probabilidad para datos agrupados representándolos en gráficos estadísticos (circulares, diagramas de árbol y polígonos de frecuencia).

La corporación estadounidense RAND publicó un libro, titulado *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*, que contenía cientos de tablas de números aleatorios. Estos números aleatorios fueron generados por una máquina especialmente construida para ese propósito.

73735	45963	78134	63873
02965	58303	90708	20025
98859	23851	27965	62394
33666	62570	64775	78428
81666	26440	20422	05720
15838	47174	76866	14330
89793	34378	08730	56522
78155	22466	81978	57323
16381	66207	11698	99314
75002	80827	53867	37797
99982	27601	62686	44711
84543	87442	50033	14021
77757	54043	46176	42391
80871	32792	87989	72248
30500	28220	12444	71840

En este sitio web encontrarás una presentación interactiva sobre los temas estudiados en esta unidad que te servirá de repaso y consolidación de lo aprendido.

Números aleatorios

Juan lanzó un dado, ¿qué número obtuvo como resultado? Juan sumó correctamente 2 + 5, ¿qué número obtuvo como resultado? ¿Cuál es la diferencia entre estas dos situaciones?

Un número aleatorio es un número que es seleccionado al azar de un conjunto de números dados. Se asume que todos los números en ese conjunto tienen la misma probabilidad de ser escogidos.

En el caso de la adición 2 + 5, su resultado no es escogido al azar. Su resultado viene determinado por la definición de la adición de números naturales y es exactamente igual a 7, en el sistema de numeración decimal. En este caso el número 7 no es un número aleatorio.

Para que ocurra un número aleatorio en una colección dada de números, se deben cumplir dos condiciones. Primera, los números están distribuidos uniformemente en esa colección o en un intervalo. Esto significa que los números deben aparecer en la sucesión con una misma frecuencia. Segunda, no es posible predecir números futuros basados en números en el pasado o en el presente. También se dice que dichos números deben ser independientes, es decir, que la ocurrencia de número en una sucesión dada no depende del número anterior ni del que le sigue.

A los seres humanos nos resulta muy difícil producir una lista de números aleatorios. Escribe una sucesión de veinte números naturales con números del 1 al 6. Esta sucesión difícilmente será una sucesión aleatoria, porque la selección de cada número seguro estará influenciada por los números escogidos antes. Por esta razón recurrimos a generadores de números aleatorios.

Generadores de números aleatorios

Contamos con varios tipos de generadores de números aleatorios. Por ejemplo, para generar números aleatorios enteros del 1 al 6, bastaría usar un dado o una ruleta con seis números. Para generar números aleatorios entre 0 y 1, o muy grandes, tenemos que recurrir a un generador digital.

Las calculadoras científicas tienen la función Ran#, para generar números aleatorios entre 0.000 y 0.999. En la hoja de cálculo *Calc*, incluida en *OpenOffice*, están disponibles las funciones ALEATORIO() y ALEATORIO.ENTRE(Menor;Mayor). La función ALEATORIO() genera un número aleatorio real de 10 dígitos entre 0 y 1. La función ALEATORIO.ENTRE(Menor;Mayor) genera un número aleatorio entero entre el número «Menor» y el número «Mayor» deseados. Por ejemplo, para generar números aleatorios enteros entre 10 y 25 escribimos: ALEATORIO.ENTRE(10;25). Otro generador de números aleatorios lo encontramos en el *software* libre *R-Studio*. En este software está disponible la función "sample" para generar números aleatorios enteros en un intervalo determinado, por ejemplo:

```
> sample (1:12,10, replace=F)
  [1]  4  2  3  11  5  1  10  6  7  9
> sample (1:12,10, replace=T)
  [1] 10  9 10   3 12  3  10  5  2  3
```

En los dos casos anteriores, se generaron 10 números aleatorios entre 1 y 12 (incluyendo a ambos), en el primer caso sin repetición (replace=F) y en el segundo caso, con repetición (replace=T).

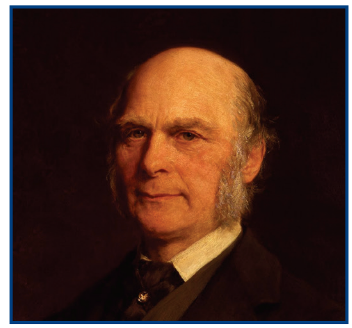
Números aleatorios y simulaciones

Encontramos ciertas situaciones en las que no se pueden realizar experimentos con sujetos reales, sobre todo con seres vivientes. En esos casos se usa una simulación. Las simulaciones nos permiten repetir un experimento un gran número de veces sin ejecutarlo físicamente. Para ello, en las simulaciones se usan generadores de números aleatorios.

Usar la función Rand de una calculadora es una manera práctica y relativamente sencilla de generar números aleatorios para una simulación. Mediante esta función se generan, en muchas calculadoras científicas, número aleatorios en el intervalo [0.000, 0.999]. Investiga sobre cómo generar números aleatorios en otro intervalo y cómo generar números aleatorios enteros con esta función.

- Usa la tecla **Rand** de una calculadora científica para simular el experimento aleatorio sacar un cuatro de cualquier palo. Hay cuatro palos diferentes en la baraja francesas (un conjunto de 52 naipes). **Repite** el experimento 70 veces y calcula la probabilidad de este resultado.

Francis Galton (1822-1911), intelectual inglés que hizo contribuciones importantes a la estadística, afirmó en 1890 que: «Como instrumento de selección al azar, no he encontrado nada superior a los dados».
Fuente:https://tashian.com/articles/a-brief-history-of-random-numbers/).



Fuente: britannica.com

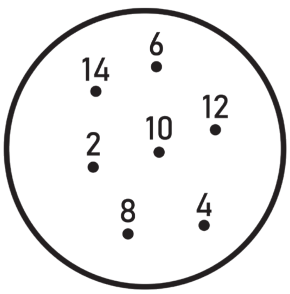
En este sitio encontrarás una presentación en español del *software* abierto *R Studio* y una explicación sobre cómo descargarlo e instalarlo.

https://estadistica-dma.ulpgc.es/cursoR4ULPGC/2-instalacion.html

- Identifica herramientas y aplicaciones tecnológicas para interpretar soluciones de situaciones diversas a partir de los conocimientos sobre números reales, álgebra, geometría, finanzas y estadística.

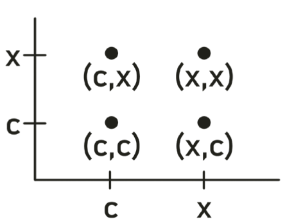
Un **conjunto:** es una colección de elementos que tienen en común una característica dada, por ejemplo: el conjunto de los números pares.

Un **diagrama de Euler-Venn**, creado por los matemáticos Leonhard Euler y John Venn, es una representación gráfica de un conjunto mediante figuras circulares y puntos en el plano. Por ejemplo, el conjunto de los números pares menores o iguales que 14 se puede representar mediante un diagrama de Euler-Venn de la forma:



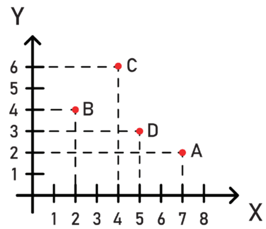
A veces se omiten los puntos y se escriben solo los elementos.

Este espacio muestral también se puede representar en un sistema de coordenadas rectangulares usando letras. A la cara la denominamos C y a la cruz la denominamos X. Por ejemplo,



Espacio muestral

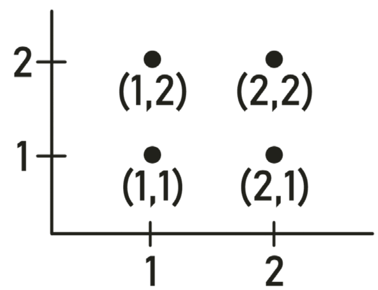
En el siguiente sistema de coordenadas rectangulares están representados cuatro puntos identificados con las letras A, B, C y D respectivamente. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente y complétala con el par ordenado correspondiente a cada punto.



	(x, y)
A	
B	
C	
D	

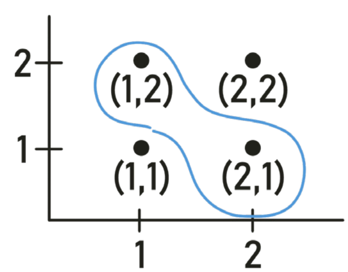
En el estudio de las probabilidades se usan diversas formas de representación, por ejemplo: tablas numéricas, gráficas y **conjuntos**.

Un espacio muestral es un conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Cada uno de los elementos de este conjunto se llama **punto muestral**. A veces, resulta útil asignarle un número a cada punto muestral para representar gráficamente un espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento aleatorio lanzar una moneda al aire y dejarla caer sobre una superficie plana tenemos como espacio muestral el conjunto {cara, cruz} y, en el experimento aleatorio lanzar una moneda dos veces seguidas tenemos el espacio muestral {caracara, caracruz, cruzcara, cruzcruz}. Este segundo espacio muestral se puede representar en un sistema de coordenadas rectangulares, asignado a la cruz el número 1 y a la cara el número 2. De esta manera, podemos reescribir el conjunto anterior como {(2, 2), (2, 1), (1, 2) (1, 1)}, el cual podemos representar gráficamente como:



Sucesos

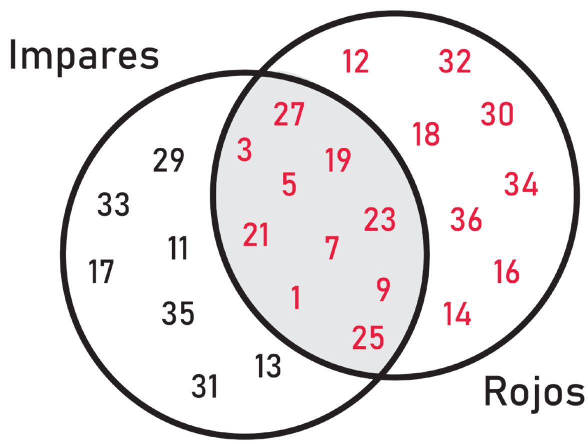
Un suceso es un subconjunto de un espacio muestral. Por ejemplo, en el espacio muestral anterior tenemos como un suceso obtener cara (C) y cruz (X). Esto lo representaríamos como conjunto {CX, XC} y gráficamente como:



La región sombreada representa el suceso obtener cara y cruz.

Los espacios muestrales y los sucesos también se pueden representar mediante un diagrama de Euler-Venn. Por ejemplo, dada una ruleta como la que se muestra en la figura, que tiene un total de 38 números: 18 negros, 18 rojos y 2 verdes, consideremos el suceso un número impar y rojo. Los elementos de este suceso están en la intersección del conjunto números rojos y el conjunto números impares. Este evento lo podemos representar con un **diagrama de Euler-Venn** de la forma siguiente:

En la ruleta de la figura el conjunto de los números rojos es: {**1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36**}, el conjunto de los números negros es: {2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35} y el conjunto de los números verdes {0, 00}.



La región sombreada es el conjunto formado por todos los números impares y rojos en una ruleta de 38 números.

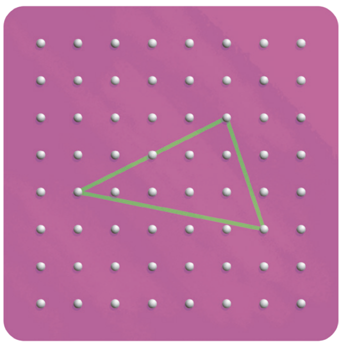
- **Representa**, en forma de diagrama de Euler-Venn, el suceso obtener un número par y rojo en una ruleta de 38 números, como el de la figura anterior.
- **Representa** en un sistema de coordenadas cartesianas el espacio muestral del experimento aleatorio lanzar dos dados.

- Desarrolla diversas estrategias para resolver problemas del contexto, dentro y fuera de la matemática, interpretando y verificando los resultados en relación con la situación del problema original.

Actividad grupal

Probabilidad geométrica

El **geoplano:** es un material didáctico que consiste en una tabla cuadrada en la que se colocan unos clavitos siguiendo un patrón cuadriculado. También se puede hacer en papel un geoplano con puntos.



¿Qué haremos?

Una investigación sobre la probabilidad geométrica usando un geoplano.

¿Qué necesitamos?

Una carpeta transparente, marcadores de pizarra (borrables), borrador de marcadores o un pañito, cuatro hojas de papel cuadriculado tamaño carta, marcador punta fina (preferiblemente de color rojo).

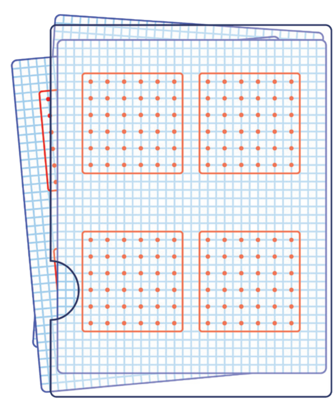
¿Cómo nos organizamos?

Formar un equipo de investigadores con tres de tus compañeros de clase. Todos los miembros del equipo deben realizar todas las actividades.

¿Cómo lo haremos?

Primero, **dibujar** en la hoja de papel cuadriculado cuatro geoplanos de puntos de 6x6 cada uno. Dibuja cada punto a tres cuadritos de separación uno del otro, tanto verticalmente como horizontalmente. Dibuja alrededor de cada arreglo de puntos un margen a un cuadrito de separación de los puntos por los cuatro lados.

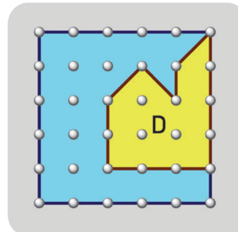
Segundo, **coloca** la hoja con los geoplanos dentro de una carpeta transparente. Pueden dibujar con los marcadores borrables figuras geométricas sobre la superficie transparente. Una vez estudiadas las figuras, pueden borrarlas y dibujar unas nuevas. Pueden registrar su trabajo tomando fotos. Esta es una manera de utilizar muchas veces la misma hoja de papel.



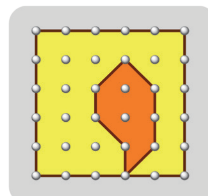
Supongamos que lanzamos dardos sobre la superficie de un geoplano. ¿Cómo calcular la probabilidad de acertar a una región del geoplano?

El matemático español **Luis Santaló** (1911-2001), exilado a Argentina desde 1939, hizo importantes contribuciones al desarrollo de la probabilidad geométrica.

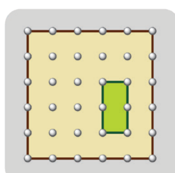
Consideremos la región D en la figura. Asumamos cada cuadrito como una unidad de área. La probabilidad de que un dardo caiga en la región D es la razón del área de dicha región, al área total del geoplano (en color azul). El área de la región D es: de 8.5 unidades de área. El área total de geoplano es 25 unidades de área. La probabilidad buscada es $\frac{8.5}{25} = \frac{1.7}{5} = 0.34$. La probabilidad de caer en una determinada región, se calcula dividiendo su área entre el área de la región más grande en la que está contenida.



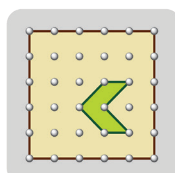
Problema 1. **Calcular** la probabilidad de que un dardo lanzado sobre el **geoplano** caiga en la región roja. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en la región amarilla?



Problema 2. Un jugador lanza dardos a dos geoplanos (a) y (b). ¿En cuál de los dos geoplanos tiene más probabilidad de acertar en la región verde?



A



B

Problema 3. Inventen dos problemas de probabilidad geométrica sobre un geoplano 6x6.

Cuál es la probabilidad de que un dardo caiga en el interior de una circunferencia que está dentro de un rectángulo que tiene tres veces su área.

Presentación y socialización de las actividades

Elaboren un informe con sus respuestas a los problemas 1 y 2, y los dos problemas inventados por el equipo.

Coevaluación

Cada miembro del equipo **registra** su opinión del trabajo de cada uno de los otros compañeros.

Autoevaluación

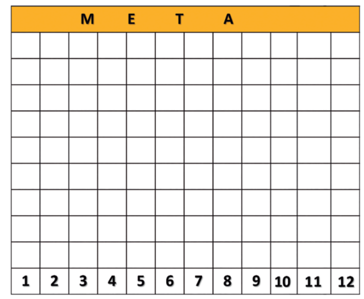
¿Qué aprendiste en esta actividad? ¿Mejoraste tus habilidades para trabajar en equipo?

- Interpreta haciendo uso del razonamiento lógico, situaciones que impliquen números reales y sus propiedades conectando con el razonamiento espacial y gráfico.
- Muestra autonomía en la búsqueda de soluciones a situaciones de problemas matemáticos respetando los diferentes criterios de abordaje de sus compañeros.

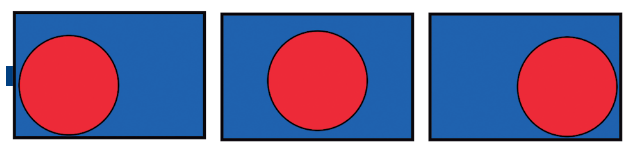
- En un laboratorio hay siete tortugas clasificadas en grupos, según sus hábitos alimenticios, en: carnívora, herbívora y omnívora. En la tabla siguiente se indica cuántas tortugas hay en cada grupo.

Alimentación	Cantidad
Carnívora	4
Herbívora	1
Omnívora	2

- Si se escoge una tortuga al azar entre todas.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la tortuga escogida sea omnívora?
  - ¿Cuál tipo de tortuga según su hábito alimenticio tiene más probabilidad de ser escogida?, ¿cuál tiene menos probabilidad?
- **Indica** cuáles de los sucesos siguientes son simples o compuestos.
  - Lanzar una moneda primero y luego sacar una carta de un mazo.
  - Lanzar dos dados.
  - Girar una ruleta después de lanzar una moneda.
- **Pinta** las caras de un dado regular de colores rojo y azul, de manera tal que el color rojo tenga más probabilidad de salir que el color azul.
- En una caja hay un cierto número de pelotas amarillas, verdes y azules. Si la probabilidad de sacar al azar una pelota azul es de $\frac{1}{3}$; de sacar una pelota verde es de $\frac{1}{2}$y de sacar una pelota roja es de $\frac{1}{6}$, ¿cuántas pelotas hay en la caja?
- **Inventa** un problema sobre una situación aleatoria tal, que la probabilidad del suceso escogido sea $\frac{1}{3}$. Muestra la resolución del problema.
- Usa un diagrama de árbol para enumerar todos los resultados posibles del experimento compuesto lanzar una moneda y luego lanzar un dado.
- En un juego de carreras de motos hay doce carriles paralelos. Se lanzan dos dados y se suman los números obtenidos. El jugador que esté en el carril con ese número avanza un lugar. ¿Tienen todos los jugadores la misma probabilidad de ganar? ¿En cuál carril colocarías tu moto para tener la mayor probabilidad de ganar?

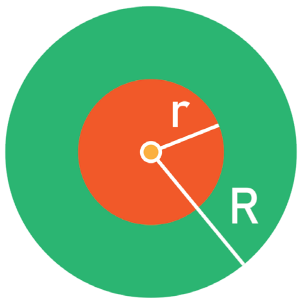


- Pedro cortó tres piezas circulares iguales de color rojo y tres piezas rectangulares iguales de color azul para construir tres tableros, como se muestra a continuación. Si se lanza un dardo sobre cada tablero, ¿en cuál de ellos es mayor la probabilidad de caer en el círculo rojo?



- Elena tiene una calculadora científica y con la tecla Rand genera números aleatorios de tres dígitos en la parte decimal, entre 0.000 y 0.999 (incluyendo a ambos). Elena introdujo la siguiente expresión en la calculadora para generar números aleatorios entre 1 y 6:1 + 6·Rand y tomaba la parte entera del resultado.
  - Explica por qué el procedimiento usado por Elena genera números aleatorios entre 1 y 6 (incluyendo a ambos).
  - Usando un procedimiento similar al de Elena, escribe una expresión para generar en una calculadora como la de Elena números aleatorios entre 1 y 12.

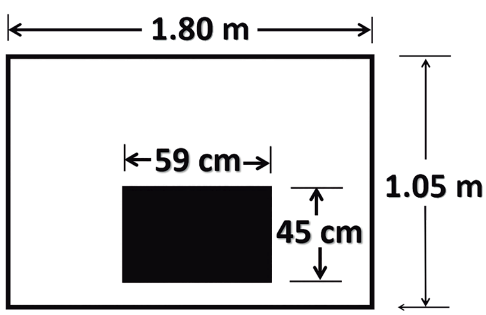
- Una persona lanza dardos a una diana, como la que se muestra en la figura. Suponiendo que todos los dardos lanzados caen sobre la superficie de la diana, ¿cuál es la probabilidad que un dardo caiga dentro del círculo rojo?



R = 2r

- En un juego de béisbol las apuestas al equipo A están en 10 a 3, y las apuestas al equipo B están de 9 a 7. ¿Cuál es la probabilidad subjetiva de cada evento?

- Un tablero de baloncesto tiene las medidas que se indican en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el rectángulo rojo con un balón lanzado sobre el tablero?



- En una caja hay 6 pelotas de basquetbol, 4 pelotas de fútbol y 7 pelotas de voleibol. Se sacan al azar y se regresa la pelota sacada a la caja.
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar de la caja una pelota de fútbol?
    - En la caja quedaron solo una pelota de voleibol, una pelota de fútbol y una pelota de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota de voleibol, después de sacar una pelota de baloncesto?
    - En la misma situación que en el en el ejercicio anterior (b), ¿cuál es la probabilidad de sacar dos pelotas del mismo deporte?

- Juana escribió las letras de la palabra DOMINICANA cada una en una ficha.

- Juana colocó todas las letras en una bolsa.
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar la letra I?
    - ¿Cuál es la probabilidad de sacar la letra O?
    - ¿Cuáles letras tienen la mayor probabilidad de salir que las otras?, ¿cuál es su probabilidad?

- Si el área del hexágono es 12 unidades cuadradas y el área del pentágono es 3 unidades cuadradas. ¿Cuál es la probabilidad de que un dardo caiga en el pentágono?

BIBLIOGRAFÍA

Referencias de Matématica

- Arnaiz Boluda, D. (2019). *Lo que no te enseñan de matemáticas financieras y deberías saber*. Madrid: CFE.
- Baca Correa, G. (1992). *Ingeniería económica*. Bogotá: Educativa.
- Castelnuovo, E. (1963). *Geometría intuitiva* (R. Romero Mercadal, Trad.). Buenos Aires: Labor.
- Cissell, R., Cissell, H. y Flaspohler, D. C. (1998). *Matemáticas financieras* (A. Gracía Mendoza, Trad.). México: Continental.
- Claphan, C. (1998). *Diccionario de matemáticas*. Madrid: Oxford-Complutense.
- Clemens, S. R., O'Daffer, P. G. y Cooney, T. J. (1984). *Geometría con aplicaciones y resolución de problemas*. San Juan de Puerto Rico: Addison-Wesley Latinoamericana.
- Conaros, G. C. (1988). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos* (E. G. Urbina Medal, Trad.). Caracas: McGraw-Hill.
- Mason, J. (1985). *Routes to algebra, roots to algebra*. Londres: Open University.
- Papoulis, E., Gori Giorgi, C. y Valenti, D. (1984). *La matemática nella realtá 2*. Scandicci, Italia: La Nuova Italia.
- Portus Govinden, L. (1990). *Matemática financiera* (Tercera edición). Bogot: McGraw-Hill.
- Spiegel, M. R. (1976). *Teoría y problemas de probabilidad y estadística* (J. Osuna Suarez, Trad.). Bogotá: McGraw-Hill.
- Vidurri Aguirre, H. M. (2004). *Matemática financiera* (Tercera edición). México: Thomson.
- Wentworth, J. y Smith, D. E. (1915). *Geometría plana y del espacio*. Nueva York: Ginn.
- Baldor, J. A. (1967). *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*. Bilbao: Vasco Americana.
- *Ciclones en República Dominicana 1851-2021 hasta agosto*. Recuperado el 13 de mayo de 2023 de: https://agricultura.gob.do/wp-content/uploads/2021/09/CICLONES-en-Republica-Dominicana-1851-a-2021-hasta-agosto.pdf
- *Ciclones en República Dominicana 1851-2021 hasta agosto*. Recuperado el 13 de mayo de 2023 de: https://agricultura.gob.do/wp-content/uploads/2021/09/CICLONES-en-Republica-Dominicana-1851-a-2021-hasta-agosto.pdf
- *Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica*. (sf). Recuperado el 10 de mayo de 2023 de: https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol11/jmsigarreta.pdf
- *Etapas de evolución de un ciclón tropical*. (sf). Recuperado el 13 de mayo de 2023 de: https://smn.conagua.gob.mx/es/ciclones-tropicales/etapas-de-evolucion
- *Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica*. (sf). Recuperado el 10 de mayo de 2023 de: https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol11/jmsigarreta.pdf
- *Etapas de evolución de un ciclón tropical*. (sf). Recuperado el 13 de mayo de 2023 de: https://smn.conagua.gob.mx/es/ciclones-tropicales/etapas-de-evolucion
- *Historia de la geometría*. (sf). Recuperado el 10 de mayo de 2023 de: http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/GeometriaAnalitica/documents/materialadicional/historia_geom.pdf
- *Matemáticas elementales en el ciberespacio*. (sf). Recuperado el 5 de mayo de 2023 de: http://www.uco.es/~ma1marea/profesor/primaria/geometri/matemati/indice.htm#:~:text=El%20sabio%20griego%20Eudemo%20de,geometr%C3%ADa%20significa%20medida%20de%20tierras.
- *Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en la actividad empresarial formal*. (sf). Recuperado el 13 de mayo de 2023 de: https://www.one.gob.do/publicaciones/2023/tecnologias-de-la-informacion-y-comunicacion-tic-en-la-actividad-empresarial-formal-enae-2022/

Referencias curriculares

- Germán, L., Mejía, G. E. S., Morales, J. E., Báez, E. E. R., & Diaz, Y. *Educación Vial Nivel Secundario*. https:/www.educando.edu.do/portal/wp-content/uploads/2023/03/Fasciculo-Educacion-Vial-NS.pdf
- Ministerio de Educación de la República Dominicana. (2022). *Adecuación Curricular.* Dirección General de Currículo. Santo Domingo: MINERD. Tomado de: https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/docs/direccion-generalde-curriculo/IgwQ-adecuacion-curricular-nivel-secudariopdf.pdf
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD). (2016a). *Diseño Curricular Nivel Primario: Primer Ciclo.* Santo Domingo, República Dominicana: Ministerio de Educación de la República Dominicana. [Links]
- Ministerio de Educación de la República Dominicana. (2016). *Diseño curricular nivel secundario, primer ciclo.* Santo Domingo: MINERD. Recuperado de https://bit.ly/2wcvInk
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD). (2016b). *Bases de la Revisión y Actualización Curricular.* Santo Domingo, República Dominicana: Ministerio de Educación de la República Dominicana.
- Polanco Rivera, J. G., Cabrera , S. ., & Robles, V. . (2023). *Caracterización del currículo: su desarrollo evolutivo según los enfoques curriculares en el contexto de la enseñanza preuniversitaria de República Dominicana.* Revista De Investigación Y Evaluación Educativa. 10(1), 88–107. https://doi.org/10.47554/revie.vol10.num1.2023.pp88-107

Obras de referencia general

- ACADEMIA DOMINICANA DE LA LENGUA (2013): *Diccionario del español dominicano,* Santo Domingo, Editora Judicial.
- ACADEMIA DOMINICANA DE LA LENGUA. *Diccionario fraseológico del español dominicano.* Santo Domingo: Editora Judicial S.R.L., 2016. 626 pp. (ISBN: 978-9945-
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2006). *Diccionario esencial de la lengua española.* Espasa Calpe.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2010): *Ortografía de la lengua española.* Madrid, Espasa Libros.
- Rimoli, R. O. (2012). *Diccionario de Términos ambientales.* Santo Domingo: Instituto Panamericano de Geografía e Historia, Sección Nacional de República Dominicana.
- Rodríguez Rancier, E., & Despotovic, N. (2011). *Diccionario enciclopédico dominicano de medio ambiente.* Washington, DC/Santo Domingo: Global Foundation for Democracy and Development (GFDD)-Fundación Global Democracia y Desarrollo (Funglode).
- Sáez, J. L. (S. J.) (1992). *Breve historia política de la República Dominicana* (1492-1992). Revista Estudios Sociales, 25(89/90).
- Urbina Barrera, F., & Hernandez-Laroche, A. (2023). *Diccionario de la inmigración y la Otredad en las Américas en la sigo XXI.*
- UNESCO. (2017). *Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación.* París: UNESCO.
- Varios autores (2003). *Enciclopedia ilustrada de la República Dominicana* (11T). Santo Domingo, Republica Dominicana: Eduprogreso, SA.

Webgrafía general

- Portal del Archivo General de la Nación. https://agn.gob.do/
- Portal del Consejo Nacional para la niñez y la adolescencia https://conani.gob.do/
- Portal de la educación dominicana. https://www.educando.edu.do/
- Portal del Instituto Geográfico Nacional. https://www.ign.gob.do/
- Portal del Ministerio de Educación de la República Dominicana. https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/
- Portal del Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales de la República Dominicana. https://ambiente.gob.do/
- Portal del Consejo Nacional de Discapacidad. https://conadis.gob.do/
- Portal de Servicios del Gobierno Dominicano. https://www.gob.do/
- Galería de arte dominicano. https://www.galeriadeartedominicana.com/
- Portal educativo de ciencias, salud y medioambiente. https://ambientech.org/
- Portal educativo para el estudio de las matemáticas. https://www.geogebra.org/
- Portal educativo para tareas escolares. https://www.educapeques.com/
- Portal educativo de lengua http://www.eldigoras.com/eldyele/lng11profyestpsb.html
- Potal de lecturas literarias y aprendizaje de la lengua http://innovacion.iems.edu.mx/portal_lengua/
- Biblioteca de literatura infantil y juvenil. https://www.cervantesvirtual.com/
- Portal de educación infantil. https://www.mundoprimaria.com/
- Recursos educativos de preescolar. https://www.twinkl.es/
- Recursos educativos diversos. https://www.edufichas.com/
- Recursos para educación secundaria. https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/secundaria/

AUTORES

- **Yolanda Serres Voisin**

  Es venezolana, estudió en la Universidad Central de Venezuela (UCV), donde se graduó de Educadora Matemática, tiene una maestría en Psicología cognitiva de la Universidad Católica Andrés Bello, donde se especializó en la didáctica de la resolución de problemas y un Doctorado en Matemática Educativa del Politécnico Nacional de México, donde estudió la formación permanente de docentes.

  Desde los inicios de su carrera ha pertenecido a la Asociación Venezolana de Educación Matemática. También es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y fundadora de la Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe.

  Durante 28 años trabajó en el curso preuniversitario de la Facultad de Ingeniería de la UCV, de donde se jubiló como profesora Titular.

  Actualmente se dedica a la Matemática Recreativa a través de la Asociación Dividive y como delegada por Venezuela de la Red Internacional de Círculos y Festivales Matemáticos.

- **Julio Mosquera.**

  Licenciado en Educación Mención Matemática, Universidad Central de Venezuela. Master of Arts, Universidad de Georgia, Atenas, estado de Georgia, Estados Unidos. Candidato Doctor en Educación, Universidad Central de Venezuela. Autor de numerosos artículos sobre temas de educación matemática publicados en varios idiomas. Autor de libros de texto para profesores de matemáticas en formación y para estudiantes de Educación Media y cursos de iniciación en la universidad. Profesor en varias universidades públicas venezolanas. Actualmente el Profesor Asociado de la Universidad Nacional Abierta, San Juan de los Morros, estado Guárico, Venezuela.

- **José Suero Rico**

  es venezolano-dominicano, estudió la licenciatura en educación en la especialidad de matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2007-2012) y la maestría en Matemática en la Universidad Simón Bolívar (2014-2019), ambas instituciones venezolanas. Ha trabajado en distintos grados de primaria y secundaria; sin embargo, en los últimos años, ha concentrado sus labores en la investigación y en la educación universitaria.

  Sus intereses en la investigación educativa se centran en la resolución de problemas y en la educación inclusiva. En el campo de la matemática, sus intereses investigativos están relacionados con temas de Álgebra Abstracta y Teoría de Números.

  Ha participado en proyectos de investigación en la República Dominicana y como jurado en Olimpiadas Matemáticas en Venezuela. Es miembro del Grupo de Interdisciplinario de Investigación Educativa Urania Montás del Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña (ISFODOSU) y de la Carrera Nacional de Investigadores del Ministerio de Educación Superior, Ciencia y Tecnología de la República Dominicana (MESCyT-RD).

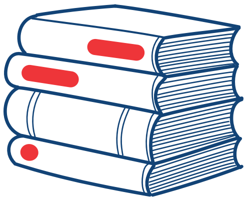
CONSEJOS PARA CUIDAR TUS LIBROS

Los libros de textos deben de tener una larga vida. Si sigues estos consejos, los libros podrán ser usados por tus hermanas, hermanos y otros estudiantes el próximo año escolar. De esta forma cuidamos el medioambiente y el patrimonio público nacional. Con estas acciones demostramos ser responsables.

1

Forra los libros inmediatamente entregados

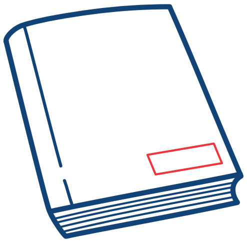
El forro no debe dañar el libro, usa forros con adhesivos.



2

Coloca una etiqueta con tu nombre en el forro

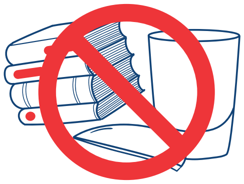
Nunca debes colocar la etiqueta de tu nombre pegada al libro. Así el estudiante siguiente lo encontrará como nuevo y podrá volver a usarlo.



3

Guarda los libros de texto una vez usados

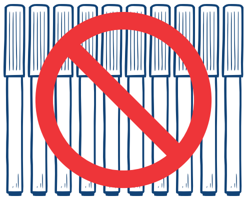
No los dejes abiertos en la mesa y evita comer o beber mientras estudias. Los líquidos son el peor enemigo de tus libros.



4

No subrayes con lapiceros o bolígrafos

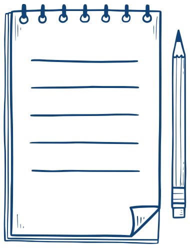
Evita el uso del lapicero, al utilizar la borra se daña el papel y la tinta del texto. En caso de ser necesario usa lápiz HB o B.



5

Estudia haciendo resúmenes o esquemas

Utiliza tu cuaderno para hacer resúmenes, esquemas y todos los ejercicios que aparecen en los libros.



CONSEJOS PARA CUIDAR TUS LIBROS

6

Evita introducir objetos dentro del libro

No marques las páginas introduciendo objetos en el libro. Si hay la necesidad de marcar, utiliza trozos de papel.

7

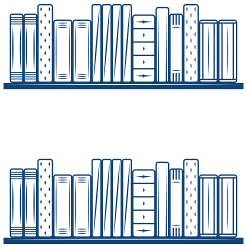
Organiza tus libros en la mochila

Organiza los libros y todos los materiales escolares en la mochila. Coloca la comida y los líquidos aparte.

8

En casa, reserva un espacio exclusivo para tus libros

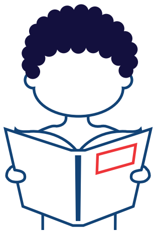
Coloca tus libros de forma vertical con el lomo hacia afuera para que se vea el título. Así estarán siempre bien conservados.



9

Utiliza el libro con cuidado

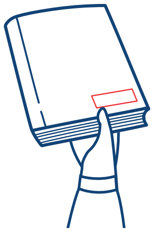
Evita forzarlos apretando o doblando excesivamente por el medio, evita forzar la encuadernación en el lomo del libro.



10

Lleva un control de los libros que prestas

Cuando prestes un libro, debes tener control sobre el préstamo y la fecha de devolución de tu libro.



PROYECTO LIBRO ABIERTO

El Proyecto Libro Abierto es una iniciativa del **Ministerio de Educación de la República Dominicana, (MINERD)**, que busca el desarrollo de contenidos y recursos didácticos, a través de diferentes plataformas digitales e impresas, con la finalidad de ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes dominicanos.

A partir de esta importante invención, el Ministerio de Educación presta especial atención a la necesidad de distribución de estos recursos y contenidos didácticos a las diferentes escuelas y liceos que conforman el sistema público de educación de la República Dominicana.

Este libro es una puerta abierta al universo virtual de conocimientos y referencias que aparecen representadas por el uso de los códigos QR de cada una de las unidades. Es una manera de ir más lejos en la búsqueda de informaciones porque permite a los estudiantes entrar en las redes, en las bibliotecas en línea, en informaciones especializadas que están cambiando por la entrada de nuevas discusiones y conocimientos científicos, en centros especializados en línea y en las rutas virtuales con las que se construyen los nuevos conocimientos que van surgiendo en las academias actuales. Se trata de un Libro Abierto con el que los estudiantes podrán emplear todas sus energías navegando y contrastando las informaciones que tiene esta colección.

Libro abierto

Para consultar el Diseño Curricular:

Dirección General de Currículo

www.ministeriodeeducacion.gob.do

Himno Nacional de la República Dominicana

I

Quisqueyanos valientes, alcemos
Nuestro canto con viva emoción,
Y del mundo a la faz ostentemos
Nuestro invicto glorioso pendón.

II

¡Salve! el pueblo que, intrépido y fuerte,
A la guerra a morir se lanzó,
Cuando en bélico reto de muerte
Sus cadenas de esclavo rompió.

III

Ningún pueblo ser libre merece
Si es esclavo indolente y servil;
Si en su pecho la llama no crece
Que templó el heroísmo viril,

IV

Mas Quisqueya la indómita y brava
Siempre altiva la frente alzará;
Que si fuese mil veces esclava
Otras tantas ser libre sabrá.

V

Que si dolo y ardid la expusieron
De un intruso señor al desdén,
¡Las Carreras! ¡Beller!, campos fueron
Que cubiertos de gloria se ven.

VI

Que en la cima de heroico baluarte
De los libres el verbo encarnó,
Donde el genio de Sánchez y Duarte
A ser libre o morir enseñó.

VII

Y si pudo inconsulto caudillo
De esas glorias el brillo empañar,
De la guerra se vio en Capotillo
La bandera de fuego ondear.

VIII

Y el incendio que atónito deja
De Castilla al soberbio León,
De las playas gloriosas le aleja
Donde flota el cruzado pendón.

IX

Compatriotas, mostremos erguida
Nuestra frente, orgullosos de hoy más;
Que Quisqueya será destruida
Pero sierva de nuevo, ¡jamás!

X

Que es santuario de amor cada pecho
Do la patria se siente vivir;
Y es su escudo invencible: el derecho;
Y es su lema: ser libre o morir.

XI

¡Libertad! que aún se yergue serena
La Victoria en su carro triunfal,
Y el clarín de la guerra aún resuena
Pregonando su gloria inmortal.

XII

¡Libertad! Que los ecos se agiten
Mientras llenos de noble ansiedad
Nuestros campos de gloria repiten
¡LIBERTAD! ¡LIBERTAD! ¡LIBERTAD!.

Letra: Emilio Prud'Homme | Música: José Reyes

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Libro abierto

SERIE 1