GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

6º
Matemática

Sexto Grado. Segundo Ciclo. Educación Primaria

Libro abierto

SERIE 1

Versión digital

MATEMÁTICA
Sexto Grado. Segundo Ciclo. Educación Primaria
SERIE 1, PROYECTO LIBRO ABIERTO

Este libro ha sido diseñado y concebido por la **UNIDAD EDITORIAL** del **Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD)** dirigida por **MANUEL NÚÑEZ ASENCIO.**

EQUIPO UNIDAD EDITORIAL

Asesoría pedagógica:	*Ancell Scheker Mendoza, Leonidas Germán,*
	Carlos Geofrannys Vidal Pérez, María Virtudes Núñez Fidalgo
Coordinadores de diagramación, corrección y cierre:	*Félix Gómez y Josephine Vilorio*
Asesor editorial:	*Lony Fernández Álvarez*
Diseño gráfico y diagramación:	Academia de Ciencias (Yris Cuevas)
	Maia Terrero, Joanna Jiménez, Karla Taveras, Grecia Santos
	Daracnny Carrasco, Mayra González, Yonolis Diaz, Josephine Vilorio, Félix Gómez
Equipo de edición:	*Matemática (Aury Pérez)*
Corrección de textos y estilo:	*Equipo de revisores del MINERD y del ISFODOSU*
Ilustración / Fotografía:	*Grupo de ilustradores del MINERD y del ISFODOSU*
	Prexel, Unsplash, Freepik, Google maps, Wikipedia

CONTENIDOS Y TEXTOS

Coordinación general:	Esther Morales
Contenidistas:	Dr. Wladimir Serrano, Dra. Esther Morales *(Convenio Institucional)*
Diseño gráfico y diagramación:	Carlos Rodríguez Almaguer
Ilustración / Fotografía:	Alan Escalona, Joselyn Salazar, Oriana Riveros, Venus Mata

Av. Máximo Gómez esquina Santiago, #2 Gazcue, Distrito Nacional, República Dominicana
809-688-9700 | info@minerd.gob.do | www.ministeriodeeducacion.gob.do
ISBN: 978-9945-646-15-3

Impreso por: Editora Corripio, S.A.S

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Convenio Institucional:

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

AUTORIDADES

Luis Abinader
Presidente de la República Dominicana

Raquel Peña
Vicepresidenta de la República Dominicana

Ángel Hernández Castillo
Ministro de Educación

Ancell Scheker Mendoza
Viceministra de Servicios Técnicos y Pedagógicos

Julio Cordero Espaillat
Viceministro de Gestión Administrativa

Ramón Rolando Reyes Luna
Viceministro de Planificación y Desarrollo Educativo

Oscar Amargós
Viceministro de Supervisión y Control de la Calidad Educativa

Ligia Jeanette Pérez Peña
Viceministra de Descentralización y Participación

Francisco Germán D´Oleo
Viceministro de Acreditación y Certificación

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

Libro Abierto

Libro Abierto es la colección de textos escolares orientada a impactar en la calidad de la educación dominicana. Para la elaboración de los contenidos de estos libros participaron las academias científicas, las instituciones educativas y las universidades nacionales. En estos centros se concentran los principales intelectuales del país cuyos talentos han sido puestos al servicio de la educación nacional.

La colección Libro Abierto tendrá dos presentaciones. Una impresa, integrada por dos series, y la otra digital. En la primera, se publicarán aquellos textos que se orientan al segundo ciclo del Nivel Inicial, los primeros tres grados de primaria y las áreas curriculares de primaria y secundaria: Ciencias Sociales, Lengua Española, Matemática y Ciencias de la Naturaleza.

En la presentación digital se publicarán los libros de texto de todas las áreas y los materiales que sirvieron de base para la educación a distancia durante la pandemia. Para ello, se dispone de una plataforma desde la cual, los estudiantes y docentes, podrán descargar dichos materiales y hacer uso de ellos libremente. Fortalecemos así la educación bajo la modalidad híbrida, impresa y digital.

Con esta colección Libro Abierto se impactará positivamente en la calidad de la educación y, además, los recursos disponibles en el presupuesto del MINERD se utilizarán de una manera más eficiente.

Estos libros constituyen un referente cualitativo en la historia de la educación dominicana y esperamos que los directores de centros, los docentes, los estudiantes y sus padres sean los críticos permanentes de los mismos y que sus opiniones ayuden a mejorarlos constantemente.

Ángel Hernández Castillo

Ministro de Educación

¿CÓMO FUNCIONA TU LIBRO?

DOS PÁGINAS DE APERTURA DE UNIDAD

Iconos de Competencias fundamentales

Competencias Específicas claramente definidas

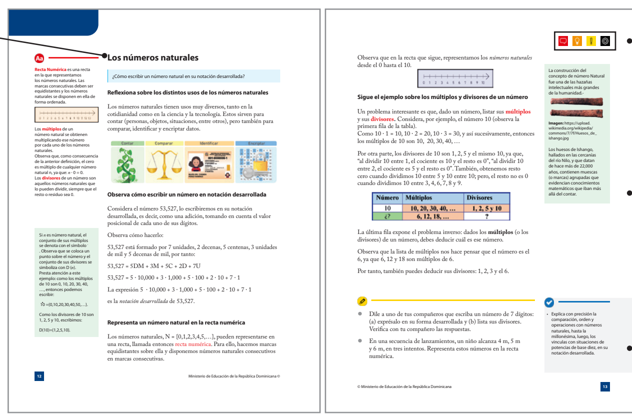
Identificador y título de la unidad didáctica

Situación de aprendizaje

Sumario de la Unidad

DIEZ PÁGINAS DE CONTENIDOS

Título de la doble página y pregunta didáctica



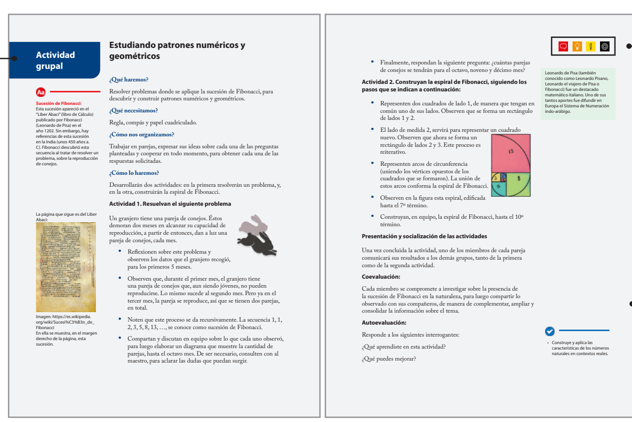
Iconos de Competencias Fundamentales aplicados a los contenidos

Columna de viñetas con contenidos variados

Indicadores de Logro

DOS PÁGINAS DE ACTIVIDAD GRUPAL

Título de la doble página

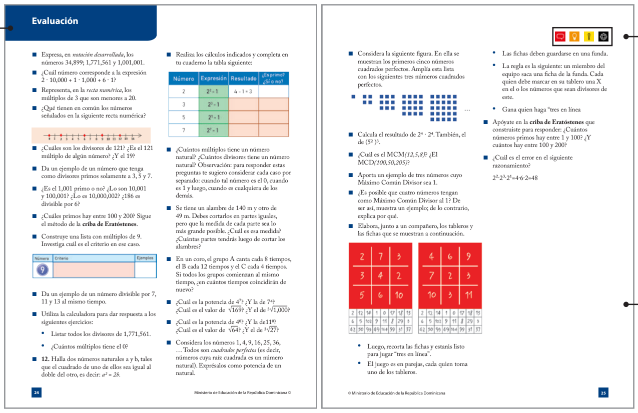


Iconos de Competencias Fundamentales

Los contenidos en las páginas de actividad grupal son variados: textos, actividades, ejercicios...

DOS PÁGINAS DE EVALUACIÓN

Título de la doble página



Iconos de Competencias Fundamentales

Se incluyen actividades diversas de **heteroevaluación y coevaluación.**

También incluye una **autoevaluación.**

Competencias Fundamentales

- Competencia Ética y Ciudadana
- Competencia Comunicativa
- Competencia de Pensamiento Lógico, Creativo y Crítico
- Competencia de Resolución de Problemas
- Competencia Científica y Tecnológica
- Competencia Ambiental y de la Salud
- Competencia de Desarrollo Personal y Espiritual

Viñetas de la Unidad

VOCABULARIO. Recurso de apoyo para conocer el significado de palabras poco comunes que enriquecen el vocabulario del estudiante.

EN LÍNEA. Viñeta opcional que motiva al estudiante a buscar informaciones virtuales a través de códigos QR y enlaces que le conectan con páginas web reconocidas.

MI PAÍS. Viñeta opcional para resaltar las instituciones públicas de nuestro país que trabajan con temas específicos.

MI CULTURA. Viñeta opcional que pone de relieve los valores culturales dominicanos.

EN EL CUADERNO. Viñeta de uso obligatorio para indicar actividades y ejercicios.

INDICADORES DE LOGRO. Dirigida al docente para evaluar el avance de los estudiantes.

Consulta nuestra página web:
www.ministeriodeeducacion.gob.do

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.

Unidad 1

Los números naturales

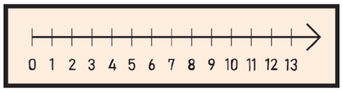
Situación de aprendizaje

La imagen muestra a un granjero contando el total de parejas de conejos. Él tomó datos de los ocho meses transcurridos desde que tenía solo una pareja: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.

- ¿Cuántas parejas de conejos tendrá el próximo mes?
- ¿Cuál es la regla de construcción de esta sucesión?

Contenido

Recta Numérica es una recta en la que representamos los números naturales. Las marcas consecutivas deben ser equidistantes y los números naturales se disponen en ella de forma ordenada.



Los **múltiplos** de un número natural se obtienen multiplicando ese número por cada uno de los números naturales.
Observa que, como consecuencia de la anterior definición, el cero es múltiplo de cualquier número natural n, ya que: $n \cdot 0 = 0$.
Los **divisores** de un número son aquellos números naturales que lo pueden dividir, siempre que el resto o residuo sea 0.

Si n es número natural, el conjunto de sus múltiplos se denota con el símbolo. Observa que se coloca un punto sobre el número y el conjunto de sus divisores se simboliza con D (n).
Presta atención a este ejemplo: como los múltiplos de 10 son 0, 10, 20, 30, 40, …, entonces podemos escribir:

$\dot{10}$ ={0,10,20,30,40,50,…}.

Como los divisores de 10 son 1, 2, 5 y 10, escribimos:

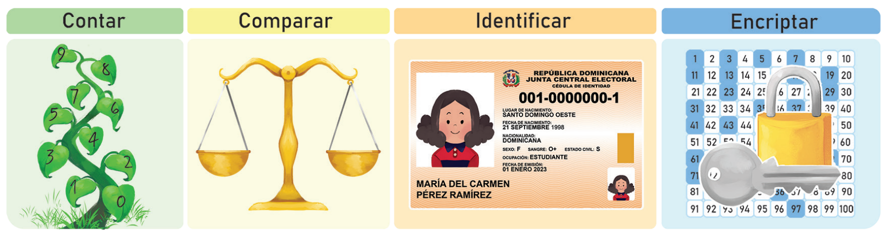
D(10)={1,2,5,10}.

Los números naturales

¿Cómo escribir un número natural en su notación desarrollada?

Reflexiona sobre los distintos usos de los números naturales

Los números naturales tienen usos muy diversos, tanto en la cotidianidad como en la ciencia y la tecnología. Estos sirven para contar (personas, objetos, situaciones, entre otros), pero también para comparar, identificar y encriptar datos.



Observa cómo escribir un número en notación desarrollada

Considera el número 53,527, lo escribiremos en su notación desarrollada, es decir, como una adición, tomando en cuenta el valor posicional de cada uno de sus dígitos.

Observa cómo hacerlo:

53,527 está formado por 7 unidades, 2 decenas, 5 centenas, 3 unidades de mil y 5 decenas de mil, por tanto:

$53{,}527 = 5DM + 3M + 5C + 2D + 7U$

$53{,}527 = 5 \cdot 10{,}000 + 3 \cdot 1{,}000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$

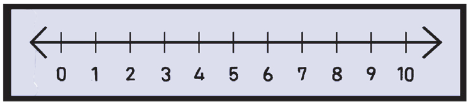
La expresión $5 \cdot 10{,}000 + 3 \cdot 1{,}000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$

es la *notación desarrollada* de 53,527.

Representa un número natural en la recta numérica

Los números naturales, N = {0,1,2,3,4,5,…}, pueden representarse en una recta, llamada entonces **recta numérica**. Para ello, hacemos marcas equidistantes sobre ella y disponemos números naturales consecutivos en marcas consecutivas.

Observa que en la recta que sigue, representamos los *números naturales* desde el 0 hasta el 10.



Sigue el ejemplo sobre los múltiplos y divisores de un número

Un problema interesante es que, dado un número, listar sus **múltiplos** y sus **divisores.** Considera, por ejemplo, el número 10 (observa la primera fila de la tabla).
Como $10 \cdot 1 = 10$, $10 \cdot 2 = 20$, $10 \cdot 3 = 30$, y así sucesivamente, entonces los múltiplos de 10 son 10, 20, 30, 40, …

Por otra parte, los divisores de 10 son 1, 2, 5 y el mismo 10, ya que, "al dividir 10 entre 1, el cociente es 10 y el resto es 0", "al dividir 10 entre 2, el cociente es 5 y el resto es 0". También, obtenemos resto cero cuando dividimos 10 entre 5 y 10 entre 10; pero, el resto no es 0 cuando dividimos 10 entre 3, 4, 6, 7, 8 y 9.

Número	Múltiplos	Divisores
10	**10, 20, 30, 40, …**	**1, 2, 5 y 10**
¿?	**6, 12, 18, …**	**?**

La última fila expone el problema inverso: dados los **múltiplos** (o los divisores) de un número, debes deducir cuál es ese número.

Observa que la lista de múltiplos nos hace pensar que el número es el 6, ya que 6, 12 y 18 son múltiplos de 6.

Por tanto, también puedes deducir sus divisores: 1, 2, 3 y el 6.

La construcción del concepto de número Natural fue una de las hazañas intelectuales más grandes de la humanidad.-

Imagen: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Huesos_de_ishango.jpg

Los huesos de Ishango, hallados en las cercanías del río Nilo, y que datan de hace más de 22,000 años, contienen muescas (o marcas) agrupadas que evidencian conocimientos matemáticos que iban más allá del contar.

- **Dile** a uno de tus compañeros que escriba un número de 7 dígitos: (a) exprésalo en su forma desarrollada y (b) lista sus divisores. Verifica con tu compañero las respuestas.
- En una secuencia de lanzamientos, un niño **alcanza** 4 m, 5 m y 6 m, en tres intentos. Representa estos números en la recta numérica.

- Explica con precisión la comparación, orden y operaciones con números naturales, hasta la millonésima, luego, los vincula con situaciones de potencias de base diez, en su notación desarrollada.

Números primos y criterios de divisibilidad

Número primo: un número es primo sí, y solamente sí, se cumplen las dos condiciones que siguen: (a) es mayor que 1 y (b) tiene exactamente dos divisores.

Número compuesto: un número es compuesto si (a) es distinto de 1 y (b) tiene más de dos divisores.

Cribar es buscar y seleccionar. Por esta razón, el método que seguiste se conoce como criba de Eratóstenes.

¿Cómo se identifica un número primo?

Deduce cuáles números son primos

Como sabes, el 0 y el 1 son números especiales, pues no son ni **primos** ni **compuestos**. De hecho, no verifican las condiciones dadas en la definición. Pero los demás números naturales sí pueden clasificarse atendiendo a ese concepto.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
32	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	87	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	97	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Observa la tabla anterior. Con base en ella mostraremos un método para deducir cuáles números son primos y cuáles no. Este método se llama criba de Eratóstenes. Lee como hacerlo y luego completa la tabla.

Para ello debes listar cierta cantidad de números, por ejemplo, desde el 1 hasta el 100. A continuación, aplica el siguiente procedimiento:

- Tacha el 1, ya que no es primo.
- Chequea si el siguiente es primo. En caso de que lo sea, procede a tachar los múltiplos mayores que él.
- Repite el paso anterior, hasta llegar al último de la lista.

Eratóstenes. (Cirene, c. 284 a.C. - Alejandría, 192 a.C.) fue un eminente astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo durante el gran siglo de la ciencia griega. Investiga en Internet sobre él, y conversa con tus compañeros al respecto:

https://es.wikipedia.org/wiki/Erat%C3%B3stenes

Observa cuándo un número es divisible por 2, 3, 4, 5, 6 y 7

En ocasiones, no es necesario hacer la división para determinar si un número es divisible entre otro. Existen reglas que permiten responder esto de forma sencilla, a veces, simplemente por inspección.

Número	Criterio	Ejemplo
2	Si el número termina en un dígito par, a saber: 0, 2, 4, 6 u 8	**23,506**
3	Si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3	**801**
4	Si sus últimos dos dígitos son 0 o son un múltiplo de 4	**116**
5	Si el último dígito es 0 o 5	**2,005**
7	Si al separar el último dígito de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras que forman los otros dígitos, resulta una diferencia igual a 0 o que sea un múltiplo de 7	**238**
10	?	**100**

Examina el penúltimo ejemplo de la tabla. Separa el último dígito de la derecha, es decir, el 8. Ahora lo multiplicas por 2, así 8 · 2 = 16.

Lo restamos del número que forman los otros dígitos: 23 - 16 = 7.

Y como 7 es un múltiplo de 7, podemos concluir que 238 es divisible entre 7.

- **Completa** la criba propuesta en la página anterior en tu cuaderno.
- Tienes una pieza de madera de 102 cm de largo. ¿Puedes **dividirla** en tres partes de la misma longitud? ¿Cuál criterio aplicaste en este caso?

El criterio de divisibilidad por 10 es de uso muy común en los cálculos, dentro y fuera de las matemáticas escolares. ¿Cuál es este criterio?
Estos criterios son una de las grandes ventajas que tiene nuestro *sistema de numeración*.

Nuestro *sistema de numeración*, también llamado *decimal o hindú-arábigo*, es de tipo posicional y utiliza como base aritmética el número 10.
Éste es el resultado de los aportes y devenir histórico de varios sistemas de numeración, tal es el caso, por ejemplo, del Babilónico (observa la imagen anexa), el chino, egipcio, romano, griego, Maya, hindú y arábigo.

- Comunica, de manera coherente las ideas y procesos matemáticos, vinculando los conocimientos adquiridos sobre los números naturales, a las situaciones del contexto.

Radicación: es la operación inversa de la *potenciación*. En la expresión $\sqrt[n]{a} = b$: *b* es el número que elevado a la *n* da como resultado *a*, es decir, $b^n = a$.

$\sqrt{\ }$ es el símbolo de la radicación, llamado "radical".
El número *a* se denomina "radicando".
n es el "índice de la raíz o del radical".
b es la "raíz".
Por ejemplo:

$\sqrt[3]{343} = 7$ ya que $7^3 = 343$.

$\sqrt[5]{32} = 2$ ya que $2^5 = 32$.

$\sqrt[4]{10{,}000} = 10$ ya que $10^4 = 10{,}000$.

En esta página, encontrarás referencias a las investigaciones que se desarrollan en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Santo Domingo.

Potenciación y radicación

¿Cuáles son los elementos que nos ayudan a definir la potenciación y radicación de un número natural?

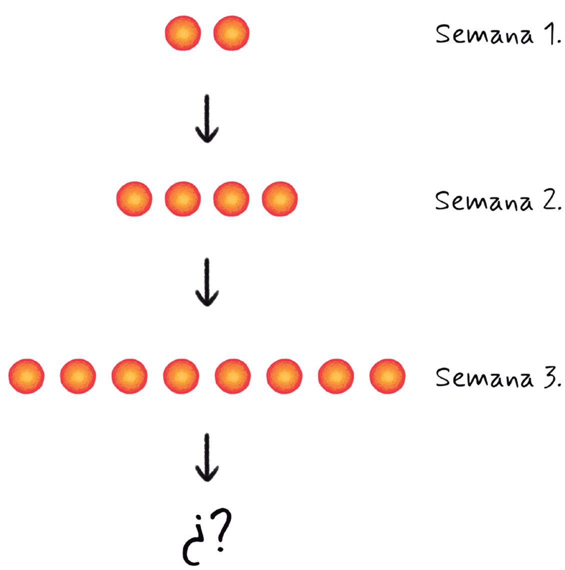
Observa el ejemplo relacionado con la potenciación

En cierta población un *virus* se transmitió de la siguiente manera: durante la primera semana hubo 2 individuos contaminados, al cabo de la segunda fueron 4 los individuos contagiados y durante la tercera ya eran 8. Tal crecimiento se mantuvo durante algunas semanas.

Debes responder:

¿Cuál fue el número de individuos contaminados para la cuarta, quinta y sexta semana?

Un diagrama como el siguiente puede ayudarte a ilustrar la información dada en el problema.



Ahora bien, nota que el número de individuos contaminados durante la segunda semana es 4, justo el doble de los afectados en el período anterior. Esto también se confirma durante la tercera semana, donde 8 sujetos son precisamente el doble de los afectados, en la semana anterior. Con esta regla, puedes responder la pregunta dada:

Semana	Número de afectados	Notación en potencia
1.ª	2	2^1
2.ª	4	$2 \cdot 2^1 = 2^2$
3.ª	8	$2 \cdot 2^2 = 2^3$
4.ª	16	$2 \cdot 2^3 = 2^4$
5.ª	32	$2 \cdot 2^4 = 2^5$
6.ª	64	$2 \cdot 2^5 = 2^6$

¿Cuál es el número de afectados para la 7.ª semana?

Observa que la respuesta es: $2 \cdot 64 = 128$.

Además, nota que el 128 puedes escribirlo como potencia de 2:

$128 = 2^7$.

Sigue el ejemplo sobre radicación de números naturales

Como sabes, existen números naturales que pueden expresarse como potencia n-ésima de otro, es decir, como $b^n = a$. Esto puedes leerlo así: "*a* es potencia *n-ésima* de *b*".

También puedes escribir, con base en la definición de **radicación**, que:

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

Por ejemplo:

¿Qué número multiplicado por sí mismo repetidas veces da 81?

Observa que $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; por tanto, $81 = 3^4$. Esto puede escribirse así: $\sqrt[4]{81} = 3$ Aquí, 81 es el radicando, 4 es el *índice la raíz*, y 3 es la *raíz*.

- ¿Cuál es el valor de: 7^2, 7^3, $3^2 \cdot 3^3$
- ¿Cuál es el valor de: $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{1}$ *y* $\sqrt[3]{1}$
- Tomado en cuenta la situación del virus planteada al inicio de esta lección, **responde** la siguiente pregunta ¿cuál será el número de afectados para la octava y novena semanas?

  Justifica cada paso para encontrar la solución.

Potenciación de un número natural: es una manera abreviada de escribir la multiplicación del número natural *a* por sí mismo, *n* veces. Simbólicamente:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots}_{n\ veces} = a^n$$

El factor *a* se denomina *base*, la cantidad de veces que aparece tal factor será el exponente (*n*) de a. Y el resultado de tal operación se denomina *potencia.*

- Ejemplos:

N	Se lee
a^2	"*a* al cuadrado" o bien "el cuadrado de *a*"
a^3	"*a* al cubo" o bien "el cubo de *a*"
a^4	"*a* elevado a la cuarta" o bien "*a* elevado a la cuatro"
a^5	"*a* elevado a la quinta" o bien "*a* elevado a la cinco"
⋮	⋮
a^n	"*a* elevado a la *n- ésima potencia*" o bien "*a* elevado a la *n*"

Además:

Simbólicamente	Se lee
$1^n = 1$	Potencial *n* de 1
$a^1 = a$	Potencial 1 de *a*
$a^0 = 1$ Con a $\neq 0$	Potencial cero de *a* (con *a* distinto de cero)
$a^n a^m = a^{n+m}$	Producto de Potencias de igual base
$(a^n)^m = a^{nm}$	Potencia *m* de la potencia *n* de *a*

- Interpreta, con juicios críticos precisos, el sentido de la radicación y la identifica como operación inversa de la potencia, para resolver problemas diversos en los que se aplica la factorización numérica, como forma de obtener el MCD y MCM.

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

(a) El mcm de dos o más números naturales es el producto de sus factores primos comunes y no comunes, elevados a su mayor exponente.

(b) El MCD de dos o más números naturales es el producto de sus factores primos comunes, con su menor exponente.
Estas ideas tienen vastas aplicaciones en muchas áreas del conocimiento y en diversas situaciones de la vida diaria.

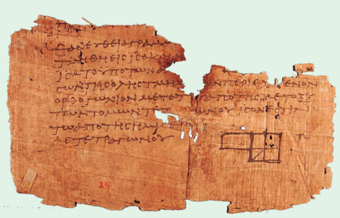
¿Cómo calcular el mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (MCD), entre dos o más números naturales?

Observa el ejemplo sobre el mcm de dos números

En lo que sigue te apoyarás en las nociones de mínimo común múltiplo (mcm) y de máximo común divisor (MCD), en el proceso de descomposición de un número natural en sus factores primos, así como en una propiedad muy importante: el **Teorema fundamental de la aritmética.**

Teorema fundamental de la aritmética: Cualquier número natural mayor que 1 es un número primo o es un producto único de números primos.

Por ejemplo: $26=2{\cdot}13$.
Observa que ambos factores (el 2 y el 13) son primos.
O bien: $100=2{\cdot}2{\cdot}5{\cdot}5=2^2\,5^2$.
Aquí, casualmente, también se tienen dos factores, el 2 y el 5, aunque con potencia 2.



Esta propiedad también se conoce como **Teorema de factorización única** y fue demostrada por Gauss en su libro "*Disquisitiones Arithmeticae*", publicado en 1801. La misma, había sido enunciada por Euclides en su obra "Elementos", publicada hace, aproximadamente, 2200 años.

Toma como ejemplo la situación que sigue: dos guaguas (o buses) prestan servicio entre dos ciudades *A y B*, con itinerarios diferentes: una de ellas parte cada 30 minutos, y la otra cada 45 minutos. Supongamos que salen juntas a las 7:00 a.m., ¿en cuánto tiempo vuelven a coincidir en *A*?

Para dar respuesta descomponemos cada número en sus factores primos:

30	2
15	3
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

Por tanto, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$. Luego para hallar el mínimo común múltiplo (MCM), elegimos los factores no comunes (2) y los comunes con el mayor exponente (5 y 3^2).

$$\text{mcm}\,(30\ 45) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90.$$

En consecuencia, transcurrirán 90 min para que ambas guaguas vuelvan a coincidir en A.

Calcula el MCD de tres números

Considera la siguiente situación: dispones de 90 canicas amarillas, 85 canicas azules, y 60 canicas verdes. Necesitas empaquetarlas en fundas con la mayor cantidad posible de cada color, con la condición de que en cada bolsa haya canicas de los tres colores y la misma cantidad de canicas en cada bolsa. En función de la información dada, observa con atención el procedimiento que a continuación se presenta, a fin de dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cuántas canicas debe contener cada funda?

Solución: Debes hallar un número que divida a todos (a 90, a 85 y a 60) y, además, que tal número sea el mayor posible.

Es decir, calcularás el MCD (90,85,60). Para ello, descompón cada uno en sus factores primos

90	2	85	5	60	2
45	3	17	17	30	2
15	3	1		15	3
5	5			5	5
1				1	

Por tanto, $90=2\cdot3^2\cdot5$, $85=5\cdot17$ y $60 = 2^2\cdot3\cdot5$.

Ahora bien, ¿cuáles son los factores comunes? Solo el 5 y como su exponente es el mismo, en las tres descomposiciones, puedes escribir:

MCD(90,85,60)=5.

A continuación, divide las cantidades iniciales entre 5: $\frac{90}{5} = 18$, $\frac{85}{5} = 17$ y $\frac{60}{5} = 12$. Así pues, en respuesta a la pregunta inicial, en cada bolsa debes colocar: 18 canicas amarillas, 17 canicas azules y 12 canicas verdes.

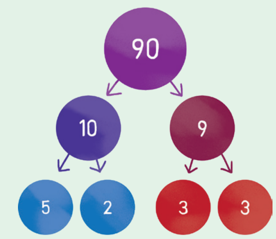


Diagrama que ilustra otra forma de hallar la descomposición de un número en sus factores primos, en este caso del 90.

Los números también pueden compararse atendiendo al número de divisores comunes, que estos tienen.

Números coprimos (también se les denomina "primos entre sí" o "primos relativos"): dos números son coprimos si, y solo si, tienen como divisor común al 1.
Por ejemplo, como el MCD(4,5)=1, entonces 4 y 5 son coprimos.
Si a y b son primos, entonces no tienen divisores en común, salvo el 1, por tanto, MCD(a,b)=1.
Pero puede suceder que a y b sean compuestos, y que sean coprimos: un ejemplo de ello es 8 y 9.

- Para seguir una indicación médica, se debe suministrar un jarabe cada 8 h y una pastilla cada 6 h. Si se comienza el tratamiento a las 6:00 p.m., ¿a qué hora se **suministrará** el jarabe y la pastilla juntos?
- Disponemos de tres tipos de dulces: 18 Jalaos de coco, 42 Palmeritas de hojaldre y 30 de Maíz caquiao. Todos ellos queremos **exponerlos** en bandejas, de manera que cada una contenga la mayor cantidad de dulces de cada tipo, pero a su vez, que haya la misma cantidad en cada bandeja. ¿De cuántas bandejas debemos disponer?

- Aplica el razonamiento lógico para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana, en las que se utilicen los conocimientos de notación con los números naturales.
- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración con números naturales, para la toma de decisiones pertinentes.

n-ésimo término de una sucesión: es la regla o patrón que describe a toda la sucesión. También se le llama "término general".
Por ejemplo: en la sucesión **2, 4, 6, 8, 10, 12, …** El *n-ésimo* término es *2n*.

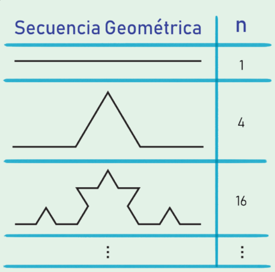
Patrón numérico: Es una sucesión de números que siguen cierta regla o lógica de construcción.

Por ejemplo:
(a) En la sucesión de números naturales **0, 1, 2, 3, 4, 5, …,** cualquiera de sus términos (a excepción del primero), se obtiene sumando 1 al anterior.

(b) La sucesión **0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, …** tiene a 0 como su primer elemento, y los demás se obtienen de sumar 6, repetidamente (es decir, contiene a los múltiplos de 6).

(c) Otras siguen un patrón de construcción como la que aquí se expone: **1, 12, 123, 1234, 12345, …,** en la que cada nuevo término se obtiene, simplemente, agregando el natural que sigue al último dígito del término anterior.

(d) O bien, geométricos, como el que puedes ver en la tabla siguiente:



(e) Observa un ejemplo más:

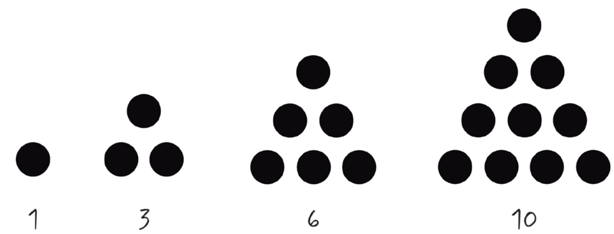
1	7	13	19	25	31	···

Números poligonales y patrones

¿Qué ejemplos puedes dar de patrones numéricos?

Observa el siguiente ejemplo sobre números triangulares

Los **números triangulares** reciben ese nombre, ya que se corresponden con una sucesión de puntos organizados, de manera que representen triángulos equiláteros. La condición es que el primero tenga 1 punto a cada lado del triángulo, el segundo lleve 2 puntos, a cada lado y así sucesivamente.

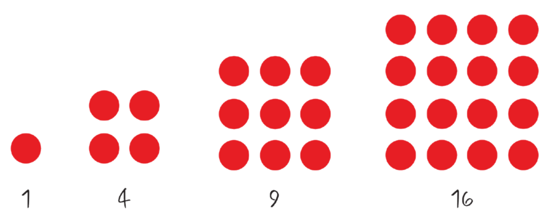


¿Cuál es el séptimo término de esta sucesión?

Comparte el método que seguiste con tus compañeros. La sucesión 1, 3, 6, 10, … es también un **patrón numérico.**

Nota que el 2° término es igual al anterior, más 2; el 3° es igual al anterior, más 3; y así con todos los demás.

Algo similar puede hacerse tomando como base otros polígonos, tal es el caso del cuadrado:



¿Cuáles son los términos 5°, 6° y 7°?

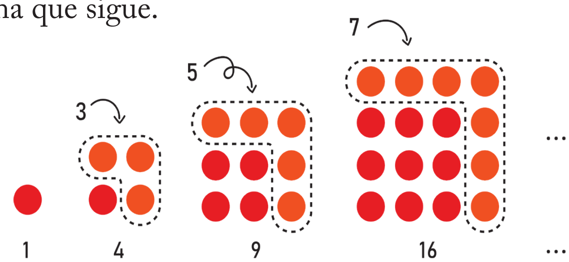
Observa que cada término de esta sucesión es un *cuadrado perfecto*. Por tanto, el *término* **n-ésimo** es igual a n^2.

¿Cuál es su 11° término? Nota que es $11^2 = 121$.

Escribe el término n-ésimo de n^2 como una adición

En el caso de la sucesión n^2 es posible escribir el *término n-ésimo,* como una adición.

Para ello separa, de cada arreglo, los puntos de su primera fila (de arriba a abajo) y de su última columna (de izquierda a derecha). Observa esto en el diagrama que sigue.



Nota que hemos separado los números 1, 3, 5, 7, … ¡Precisamente la sucesión de números impares!

Por otra parte, 4 - 3 = 1; 9 - 5 = 4; 16 - 7 = 9; …

Entonces, puedes escribir:

1	4	9	16	¿?
-	$4 = 2^2 = 1 + 3$	$9 = 3^2 = 4 + 5$	$16 = 4^2 = 9 + 7$	¿?

Y ya estás en condiciones de responder, ¿cuál es el siguiente número cuadrado? Además, escríbelo como la suma del cuadrado de 4 con un número impar.

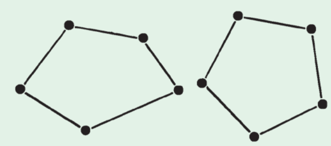
También, puedes pensar en números relacionados con otros polígonos, como por ejemplo en los números pentagonales, hexagonales, heptagonales, octogonales, entre otros.

- **Apóyate** en la calculadora, para listar los primeros 20 números cuadrados.
- ¿Cuál es el trigésimo número cuadrado?

Conversa con tus compañeros sobre tu solución.

Este tipo de números fueron de interés especial para Pitágoras y su escuela científica-filosófica-religiosa, hace ya unos 2600 años.

Observa que se consideran **pentágonos regulares**, es decir, polígonos de 5 lados (a) cuyos lados tienen la misma medida, y (b) sus ángulos también tienen la misma medida.



En la figura: el pentágono de la derecha es *regular.*
El primer número pentagonal es el 1. El segundo número pentagonal se construye como sigue: disponemos 2 puntos en cada lado y contamos el total de puntos. Para el tercer número pentagonal, disponemos de 3 puntos a cada lado y construimos pentágonos superpuestos (que compartan un vértice), y luego contamos todos los puntos; y así sucesivamente.

- Emplea, con precisión, herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos, sobre conocimientos de numeración con números naturales.

Actividad grupal

Aa

Sucesión de Fibonacci:
Esta sucesión apareció en el "Liber Abaci" (libro de Cálculo) publicado por Fibonacci (Leonardo de Pisa) en el año 1202. Sin embargo, hay referencias de esta sucesión en la India (unos 450 años a. C). Fibonacci descubrió esta secuencia al tratar de resolver un problema, sobre la reproducción de conejos.

La página que sigue es del *Liber Abaci:*

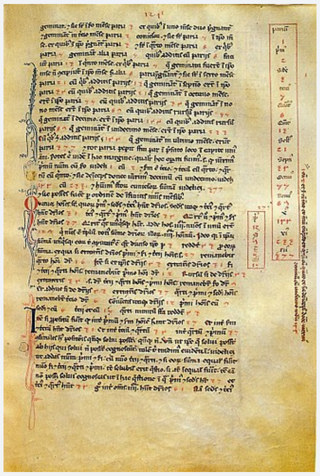


Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci
En ella se muestra, en el margen derecho de la página, esta sucesión.

Estudiando patrones numéricos y geométricos

¿Qué haremos?

Resolver problemas donde se aplique la sucesión de Fibonacci, para descubrir y construir patrones numéricos y geométricos.

¿Qué necesitamos?

Regla, compás y papel cuadriculado.

¿Cómo nos organizamos?

Trabajar en parejas, expresar sus ideas sobre cada una de las preguntas planteadas y cooperar en todo momento, para obtener cada una de las respuestas solicitadas.

¿Cómo lo haremos?

Desarrollarán dos actividades: en la primera resolverán un problema, y, en la otra, construirán la espiral de Fibonacci.

Actividad 1. Resuelvan el siguiente problema

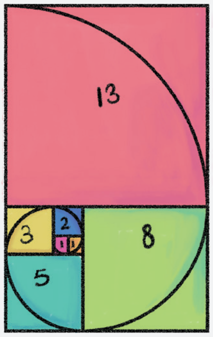
Un granjero tiene una pareja de conejos. Éstos demoran dos meses en alcanzar su capacidad de reproducción, a partir de entonces, dan a luz una pareja de conejos, cada mes.

- Reflexionen sobre este problema y observen los datos que el granjero recogió, para los primeros 5 meses.
- Observen que, durante el primer mes, el granjero tiene una pareja de conejos que, aun siendo jóvenes, no pueden reproducirse. Lo mismo sucede al segundo mes. Pero ya en el tercer mes, la pareja se reproduce, así que se tienen dos parejas, en total.
- Noten que este proceso se da recursivamente. La secuencia 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, se conoce como sucesión de Fibonacci.
- Compartan y discutan en equipo sobre lo que cada uno observó, para luego elaborar un diagrama que muestre la cantidad de parejas, hasta el octavo mes. De ser necesario, consulten con al maestro, para aclarar las dudas que puedan surgir.

- Finalmente, respondan la siguiente pregunta: ¿cuántas parejas de conejos se tendrán para el octavo, noveno y décimo mes?

Actividad 2. Construyan la espiral de Fibonacci, siguiendo los pasos que se indican a continuación:

- Representen dos cuadrados de lado 1, de manera que tengan en común uno de sus lados. Observen que se forma un rectángulo de lados 1 y 2.
- El lado de medida 2, servirá para representar un cuadrado nuevo. Observen que ahora se forma un rectángulo de lados 2 y 3. Este proceso es reiterativo.
- Representen arcos de circunferencia (uniendo los vértices opuestos de los cuadrados que se formaron). La unión de estos arcos conforma la espiral de Fibonacci.
- Observen en la figura esta espiral, edificada hasta el 7.º término.
- Construyan, en equipo, la espiral de Fibonacci, hasta el 10.º término.



Presentación y socialización de las actividades

Una vez concluida la actividad, uno de los miembros de cada pareja comunicará sus resultados a los demás grupos, tanto de la primera como de la segunda actividad.

Coevaluación:

Cada miembro se compromete a investigar sobre la presencia de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza, para luego compartir lo observado con sus compañeros, de manera de complementar, ampliar y consolidar la información sobre el tema.

Autoevaluación:

Responde a los siguientes interrogantes:

¿Qué aprendiste en esta actividad?

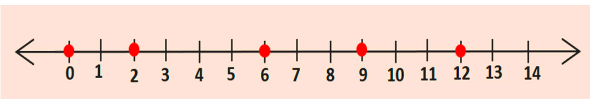
¿Qué puedes mejorar?

Leonardo de Pisa (también conocido como Leonardo Pisano, Leonardo el viajero de Pisa o Fibonacci) fue un destacado matemático italiano. Uno de sus tantos aportes fue difundir en Europa el Sistema de Numeración indo-arábigo.

- Construye y aplica las características de los números naturales en contextos reales.

Evaluación

- Expresa, en notación desarrollada, los números 34,899; 1,771,561 y 1,001,001.
- ¿Cuál número corresponde a la expresión $2 \cdot 10{,}000 + 1 \cdot 1{,}000 + 6 \cdot 1$?
- Representa, en la recta numérica, los múltiplos de 3 que son menores a 20.
- ¿Qué tienen en común los números señalados en la siguiente recta numérica?



- ¿Cuáles son los divisores de 121? ¿Es el 121 múltiplo de algún número? ¿Y el 19?
- Da un ejemplo de un número que tenga como divisores primos solamente a 3, 5 y 7.
- ¿Es el 1,001 primo o no? ¿Lo son 10,001 y 100,001? ¿Lo es 10,000,002? ¿186 es divisible entre 6?
- ¿Cuáles primos hay entre 100 y 200? Sigue el método de la **criba de Eratóstenes**.
- Construye una lista con múltiplos de 9. Investiga cuál es el criterio en ese caso

Número	Criterio	Ejemplos
9		

- Da un ejemplo de un número divisible entre 7, 11 y 13 al mismo tiempo.
- Utiliza la calculadora para dar respuesta a los siguientes ejercicios:
  - Listar todos los divisores de 1,771,561.
  - ¿Cuántos múltiplos tiene el 0?
- Halla dos números naturales a y b, tales que el cuadrado de uno de ellos sea igual al doble del otro, es decir: $a^2 = 2b$.
- Realiza los cálculos indicados y completa en tu cuaderno la tabla siguiente:

Número	Expresión	Resultado	¿Es primo? ¿Sí o no?
2	$2^2 - 1$	$4 - 1 = 3$	
3	$2^3 - 1$		
5	$2^5 - 1$		
7	$2^7 - 1$		

- ¿Cuántos múltiplos tiene un número natural? ¿Cuántos divisores tiene un número natural? Observación: para responder estas preguntas te sugiero considerar cada caso por separado: cuando tal número es el 0, cuando es 1 y luego, cuando es cualquiera de los demás.
- Se tiene un alambre de 140 m y otro de 49 m. Debes cortarlos en partes iguales, pero que la medida de cada parte sea lo más grande posible. ¿Cuál es esa medida? ¿Cuántas partes tendrás luego de cortar los alambres?
- En un coro, el grupo A canta cada 8 tiempos, el B cada 12 tiempos y el C cada 4 tiempos. Si todos los grupos comienzan al mismo tiempo, ¿en cuántos tiempos coincidirán de nuevo?

- ¿Cuál es la potencia de 4^7? ¿Y la de 7^4? ¿Cuál es el valor de $\sqrt{169}$? ¿Y el de $\sqrt[3]{1,000}$?
- ¿Cuál es la potencia de 4^0? ¿Y la de 11^0? ¿Cuál es el valor de $\sqrt{64}$? ¿Y el de $\sqrt[3]{27}$?
- Considera los números 1, 4, 9, 16, 25, 36, … Todos son cuadrados perfectos (es decir, números cuya raíz cuadrada es un número natural). Exprésalos como potencia de un natural.
- Considera la siguiente figura. En ella se muestran los primeros cinco números cuadrados perfectos. Amplía esta lista con los siguientes tres números cuadrados perfectos.

- Calcula el resultado de $2^4 \cdot 2^4$. También, el de $(5^2)^3$.
- ¿Cuál es el mcm (12,5,8)? ¿El MCD(100,50,205)?
- Aporta un ejemplo de tres números cuyo Máximo Común Divisor sea 1.
- ¿Es posible que cuatro números tengan como Máximo Común Divisor al 1? De ser así, muestra un ejemplo; de lo contrario, explica por qué.
- Elabora, junto a un compañero, los tableros y las fichas que se muestran a continuación.

2	7	3
3	4	2
5	6	10

2	12	14	1	0	17	18	13
6	5	102	9	11	8	29	3
42	50	93	49	144	99	31	37

4	6	9
7	2	3
10	3	11

2	12	14	1	0	17	18	13
6	5	102	9	11	8	29	3
42	50	93	49	144	99	31	37

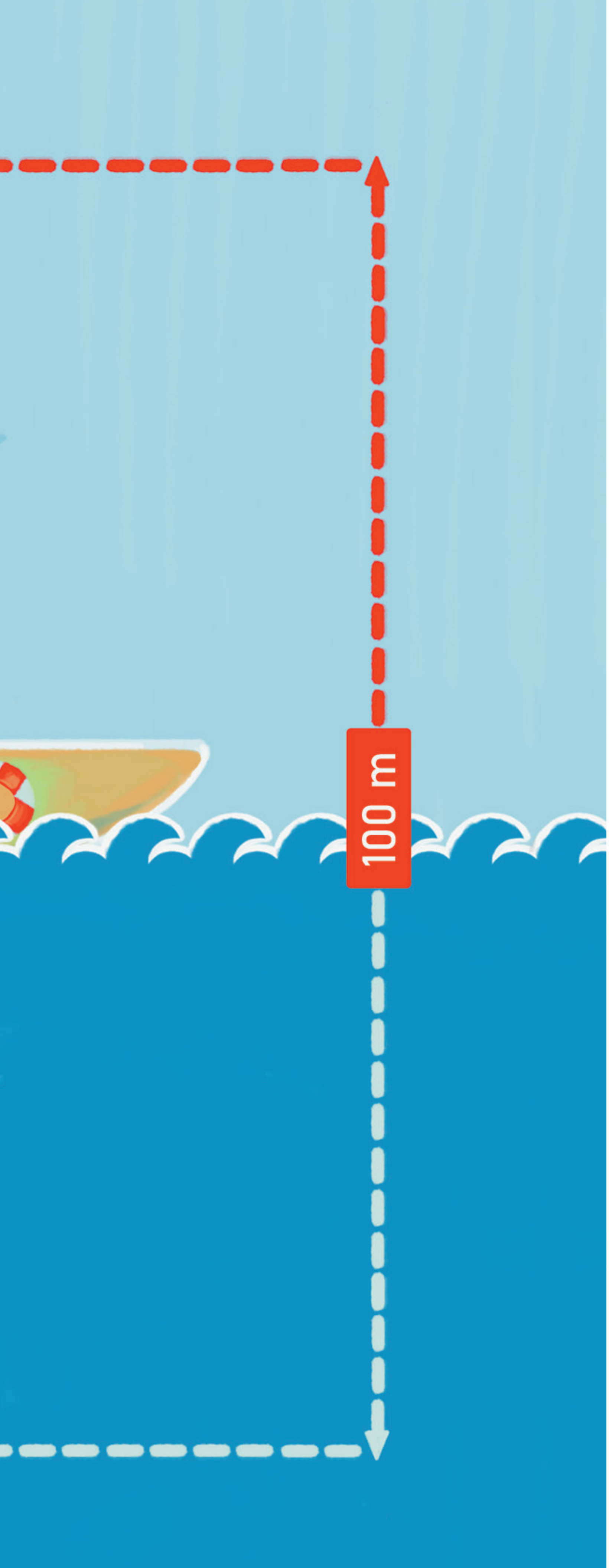
  - Luego, recorta las fichas y estarás listo para jugar "tres en línea".
  - El juego es en parejas, cada quien toma uno de los tableros.
  - Las fichas deben guardarse en una funda.
  - La regla es la siguiente: un miembro del equipo saca una ficha de la funda. Cada quien debe marcar en su tablero una X en el o los números que sean divisores de este.
  - Gana quien haga "tres en línea

- Apóyate en la **criba de Eratóstenes** que construiste para responder: ¿Cuántos números primos hay entre 1 y 100? ¿Y cuántos hay entre 100 y 200?
- ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento?

$2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^1 = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$

Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 2

Los números enteros

Situación de aprendizaje

En la vida cotidiana nos encontramos con situaciones en las que aparecen los números enteros, por ejemplo: en la altitud y la profundidad.

Observa la imagen y responde:

¿Qué medio de transporte está por encima del nivel de mar?

¿Qué medio de transporte está por debajo del nivel del mar?

¿Qué medio de transporte está a nivel del mar?

¿A cuántos m se encuentra el barco del nivel del mar?

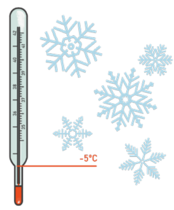
Si el helicóptero se encuentra a 40 m del nivel del mar ¿Es correcto afirmar que el submarino se encuentra a menos 60 m del nivel del mar?

Contenido

- Números enteros
- Recta numérica y valor absoluto
- Adición y sustracción de números enteros
- Multiplicación y división exacta de números enteros
- Potencia y operaciones combinadas en $\mathbb{Z}$
- Actividad grupal
- Evaluación

Números enteros

Números negativos: se identifican con el signo "– " a la izquierda y su valor es menor que cero.



El termómetro marca 5º C bajo cero.

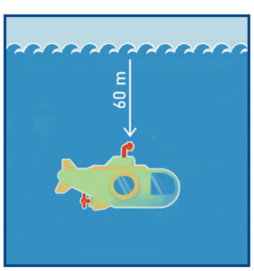
Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe el signo "+", delante de los positivos: + 1, + 2, + 3. Cuando no se le escribe signo al número, igualmente se asume como positivo.
El cero es el único número entero que no tiene signo.

Puedes denotar al conjunto {1,2,3,…} con el símbolo $\mathbb{Z}^+$ y llamarlos enteros positivos. Al igual que denotar con $\mathbb{Z}^-$ al conjunto {…,- 3,- 2,- 1} y llamarlos enteros negativos.

... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ...

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Notación de los números enteros



¿Cuál número natural se puede sumar con el 6, para que su resultado sea 2?

Los números negativos surgieron como una necesidad de dar respuestas a situaciones, que no se podían representar solo con números naturales, por ejemplo: señalar temperaturas bajo cero, indicar las profundidades bajo el nivel del mar, expresar la pérdida de dinero en un negocio, entre otras.

Observa los siguientes ejemplos donde se representan algunas situaciones con números negativos

Situación	Número negativo
La temperatura de una ciudad es 3 °C bajo cero	-3 °C
Un buzo está a 6 metros por debajo del nivel del mar	$-6\ m$
Una empresa registró una pérdida en el mes de RD$50,000 pesos	−RD$50,000

Tal como observamos en los ejemplos anteriores, para escribir un número entero negativo primero escribimos el signo – y luego el número. Por otra parte, para leer -3 °C , se lee como: "menos tres grados centígrados" o "tres grados centígrados bajo cero".

Así pues, se hace necesario la creación de un nuevo conjunto que contenga a los números naturales y a otros elementos. Estos "nuevos números" son los opuestos de los naturales, que se conocen como **números negativos**. Así, el conjunto de los números enteros está formado por los naturales (los cuales a partir del uno se consideran positivos), sus opuestos (los negativos) y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Lee el siguiente problema y observa su solución

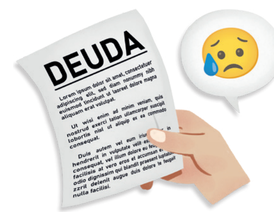
Un submarino que se encuentra a una profundidad de 60 m, se sumerge 200 m más, ¿a cuántos metros, por debajo del nivel del mar, se encuentra finalmente el submarino?

Solución: al sumergirse el submarino significa que sigue bajando después de los 60 m, por lo que le sumamos 200 m a los 60 m, para obtener un total de 260 m. Luego, podemos decir que el submarino se encuentra a 260 m, por debajo del nivel del mar o que se encuentra a - 260 m.

Los números enteros, se representan con la letra $\mathbb{Z}$, debido a que esta es la primera letra del vocablo alemán *zahlen*, que significa número.

- Para cada caso, **completa** en el recuadro azul la información solicitada

Redacta una situación para el número entero	Asigna el número entero para cada situación
Julia tiene una deuda de RD$1,000,500 pesos	
	4 °C
Un avión está volando a 9,500 metros de altura	
	-30 m
La temperatura subió a 37 °C	

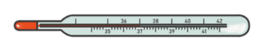


Julia está preocupada por la deuda que tiene.

En una provincia se **registró** una temperatura de 2 grados bajo cero, a las 8 de la mañana; al mediodía, la misma había subido 20 grados. ¿Cuál era la temperatura a esa hora?

El avión se encuentra a 9,500 m de altura.

- Las temperaturas mínimas de una ciudad, correspondientes al año 2022, se encuentran en la siguiente tabla, pero faltan algunos valores. **Complétalos** con las pistas que aparecen en el recuadro. Luego, comparte y comenta con dos de tus compañeros la solución. ¿Estuvieron todos de acuerdo con los resultados? ¿Cómo valoras las respuestas dadas por los demás?



El termómetro marca 37 °C.

<table>
<tr><th>Mes</th><th>Temperaturas mínimas</th><td rowspan="13">*La temperatura de enero fue dos grados inferiores a la de febrero.
*La temperatura del mes de marzo fue diez grados superiores a la del mes de febrero.
*La temperatura del mes de mayo fue cuatro grados, superior a la del mes de noviembre.
*El mes de agosto fue el más caluroso, su temperatura mínima fue ocho grados, mayor que la de octubre.
*De noviembre a diciembre bajó cinco grados la temperatura mínima.</td></tr>
<tr><td>Enero</td><td></td></tr>
<tr><td>Febrero</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>Marzo</td><td></td></tr>
<tr><td>Abril</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Mayo</td><td></td></tr>
<tr><td>Junio</td><td>28</td></tr>
<tr><td>Julio</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Agoto</td><td></td></tr>
<tr><td>Septiembre</td><td>35</td></tr>
<tr><td>Octubre</td><td>29</td></tr>
<tr><td>Noviembre</td><td>22</td></tr>
<tr><td>Diciembre</td><td></td></tr>
</table>

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Aa

Línea: es una sucesión continua de puntos en el plano.

Segmento unitario: es el segmento que se toma como referencia de la unidad para medir otros segmentos.

Todos los números en la recta numérica están ordenados en forma creciente de izquierda a derecha, podemos ordenarlos usando el símbolo <, que significa menor que.

-4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1< 2 < 3 < 4.

- Todos los números negativos son menores que cero: - 2 < 0.
- Todos los números negativos son menores que cualquier número positivo: - 2 < 1.
- Entre dos números negativos el mayor es el que está más cerca del cero: -2 > -6.

¿Cuál de los siguientes números es mayor?

a. - 1,600,840.

b.- 3,540,000.

c. - 5,128,000.

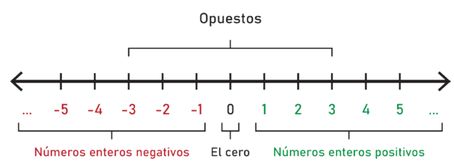
d.- 12,000,000.

Recta numérica y valor absoluto

¿Cómo ordenarías los siguientes números 4, -3, -1, 2, 0?

Lee acerca de cómo se representan los números enteros en la recta numérica

Al marcar y numerar cuidadosamente una **línea**, se puede construir una recta numérica, la cual muestra los números enteros a cierta distancia del cero. Se sitúan a la derecha del 0 los números enteros positivos y a la izquierda los números enteros negativos. Las puntas de flecha muestran que la recta numérica continua en ambas direcciones.



Los números negativos se consideran los opuestos de sus simétricos positivos y viceversa, así que se puede decir que -5 es el opuesto de 5 o 5 es el opuesto de - 5.

Para dibujar una recta numérica, es importante centrar más la atención en los **segmentos unitarios** que se tracen sobre ella, los cuales deben ser de igual longitud que en las marcas de verificación; por ejemplo, para dibujar una recta numérica con los números enteros del - 1 al 4, debes seguir los siguientes pasos:

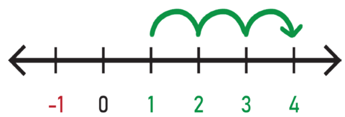
1. Inicia dibujando un segmento de línea con una punta de flecha en cada extremo del segmento, para mostrar que la recta numérica continúa sin fin. 

2. Realiza una marca para el cero y coloca el cero "0".

3. Realiza marcas con espaciados iguales a la izquierda del cero, para ubicar el menos uno “- 1” y a la derecha del cero, para ubicar los números 1, 2, 3 y 4.

Cuando hayas terminado, la recta numérica se debería ver como sigue:

Aprovechemos este ejemplo para responder a la siguiente pregunta, ¿cuántos segmentos unitarios hay del 1 al 4, en la recta numérica dibujada?



En la recta numérica dibujada, vemos un segmento de unidad del 1 al 2, otro de 2 al 3 y otro del 3 al 4. Así, el número de segmentos unitarios del 1 al 4 es tres.

De los números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
De los números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

Ahora trabajemos con el valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número es la distancia de este al punto cero, en la representación en la recta numérica. Para simbolizar el valor absoluto se utilizan dos barras verticales | |.

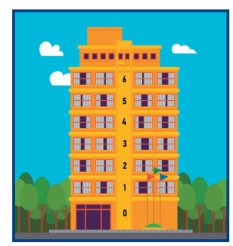
El valor absoluto de - 4 es igual a 4, porque hay 4 unidades desde el 0 hasta el - 4. Matemáticamente se representa por: $|-4| = +4$.

El valor absoluto de + 4 es igual a 4, porque hay 4 unidades desde el 0 hasta el + 4. Matemáticamente se representa por: $|+4| = +4$.

El valor absoluto de un número entero es una distancia, por tanto, el resultado es un número positivo o cero.
El valor absoluto de 0 es igual a 0, porque hay 0 unidades desde el 0 hasta el 0.

Analicemos el siguiente ejemplo

Juan se encuentra en el sótano 2 parqueando su vehículo y su apartamento se encuentra en el piso 3. Sabiendo que en su edificio existe un nivel 0, ¿a qué distancia se encuentra Juan de su apartamento?



Solución: la respuesta la podemos obtener contando los pisos que hay entre el sótano y el piso 3. Es decir, juan se encuentra a 5 pisos de su apartamento. Igualmente, podemos encontrar la respuesta haciendo uso del valor absoluto. Sabiendo que el sótano está a - 2 pisos del nivel 0, calculamos $|-2|=2$, y que su apartamento está a 3 pisos del nivel 0, calculamos $|3|=3$. Por lo tanto, la distancia desde el parqueo al apartamento de Juan viene dada por: $|-2|+|3|=2+3=5$.

Practica: resuelve el test de números enteros
https://es.educaplay.com/recursos-educativos/29965-los_numeros_enteros.html

- En la siguiente recta numérica, los puntos A y B **indican** números enteros

  ¿Cuáles son los números que se identifican con los puntos A y B?
  ¿Cuál de los dos números enteros es mayor? ¿Por qué?

- **Calcula**:
  • $|742{,}235|$ • $|-5.432.325|$ • $|1.099.333|$ • $|-105.205|$

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Cuando tengamos que calcular (+ 8) + (-15), podemos escribir en forma más reducida + 8 - 15, por lo que el resultado de esa operación no se altera. Es decir: (+ 8) + (- 15) = + 8 - 15.
Luego, podemos decir de forma más simple: al sumar números de diferentes signos, los números se restan y se coloca el signo del mayor:
$(+8) + (-15) = +8 - 15 = -(15 - 8) = -7$.

En cada caso, cuál es el valor de la letra a, b y c y qué propiedad de la adición se está utilizando.

1. $-4 + a = -4$.
2. $-5 + b = 0$.
3. $[2 + (-3)] + c = 2 + [(-3) + (-4)]$.

Siendo a, b y c números enteros, se cumplen las siguientes propiedades para la adición:

1. Clausura: $a + b$ siempre es un número entero.
2. Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Conmutativa: $a + b = b + a$.
4. Elemento neutro: $a + 0 = a$.
5. Elemento opuesto: $a + (-a) = 0$.

Practica con temperaturas la suma de números enteros.

https://www.geogebra.org/m/n5cbsk96#material/fhuyAPvG

Adición y sustracción de números enteros

Si tienes un número entero positivo y le sumas otro número entero negativo, ¿qué podrías decir acerca del signo del resultado?

Analiza la adición de números enteros, a través del concepto de deuda

Para **adicionar o sumar** números enteros del mismo signo se suman los valores absolutos de los números y se deja el mismo signo. Por ejemplo, $(-9) + (-5)$, primero calculamos los valores absolutos de cada sumando: $|-9| = \mathbf{9}$ y $|-5| = 5$,

$(-9) + (-5) = -(\mathbf{9} + 5) = -14$.

Problema 1: Luis le debe a Juan 50 pesos y le pide prestado 20 pesos más, ¿cuánto finalmente le debe Luis a Juan? ¿Con qué número representas esta deuda?

Luis le debe 50 pesos a Juan: -50.

Luis le debe 20 pesos más a Juan: -20.

Luego: $(-50) + (-20) = -(50 + 20)\ \ -70$.

Esto quiere decir que Luis sigue teniendo una deuda con Juan, pero ahora esa deuda es mayor, ya que todavía le debe 70 pesos, por tanto, su saldo es negativo.

Para **adicionar o sumar** números enteros de diferentes signos se **resta** el valor absoluto del número mayor con el valor absoluto del número menor y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto. Por ejemplo, para calcular $(-7) + (+11)$, primero deducimos los valores absolutos de cada sumando: $|-7| =$ y $|+11| = \mathbf{11}$.

Luego, $(-7) + (+11) = +(\mathbf{11} - 7) = +4$.

Problema 2: ahora, imagina que Luis recibió 40 pesos por limpiar el jardín de su vecina, y decidió abonarlos a la deuda de los 50 pesos que tiene con Juan. ¿Cuánto dinero le queda a Luis?

Luis tiene una deuda de 70 pesos: -70.

Luis recibió 40 pesos por limpiar el jardín: +40.

Entonces: $(-70) + (40) = -(70 - 40) = -30$.

Esto quiere decir que Luis sigue teniendo una deuda de 30 pesos con Juan, aún, le faltan 30 pesos para terminar de cancelar su deuda o Luis le sigue debiendo 30 pesos a Juan (su saldo es negativo).

Resta o sustrae números enteros

La sustracción o resta de números enteros es el resultado de sumar al primer entero, llamado minuendo (m), con el opuesto del segundo entero, llamado sustraendo (n). Es decir, $m - n = m + (-n)$.

Ejemplo: $(+33) - (+22) = (+33) + (-22) = 33 - 22 = +11$.

Resuelve problemas con resta de números enteros

La mamá de José tiene ahorrado en el banco RD$ 1,550,000 y se dispone a invertir en la compra de un solar que le cuesta RD$ 700,000. ¿Cuánto dinero le quedará a la mamá de José en el banco, luego de realizar la adquisición?

Para resolver este problema, se plantea una resta entre la cantidad de pesos que tiene en el banco la mamá de José y el monto a pagar por la compra del terreno (ver figura 1):

$(+1{,}550{,}000) - (+700{,}000) = (1{,}550{,}000) + (-700{,}000) = 850{,}000$.

Se concluye que a la mamá de José le quedarán en el banco RD$ 850,000, luego de comprar el solar.

- **Calcula:**
  - $(-3) + (-7)$
  - $(-13) + (+8) + (+15) + (-38)$
  - $(+21) - (-16)$ • $(-15) - (-1)$
  - $(-2{,}324{,}216) - (+1{,}825{,}000)$.
- **Resuelve** el problema:

  El Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales de República Dominicana incluyó, entre sus metas del presente año, realizar una gran campaña de arborización, que consiste en la siembra de 2,000,000 árboles, de diferentes especies. Ahora bien, si a la fecha se han sembrado 1,617,000, ¿cuántos árboles faltan por sembrar para cumplir la meta?

El Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales de República Dominicana es el organismo encargado de elaborar, ejecutar y fiscalizar políticas nacionales, sobre el medio ambiente y recursos naturales.

Información: https://ambiente.gob.do/

Siendo a y b números enteros, se cumplen las siguientes propiedades para la sustracción:

1. Clausura: m – n siempre es un número entero.
2. No es conmutativa.

Observa el ejemplo:

$(+2) - (-3) = +2 + 3 = 5$.

$(-3) - (+2) = -3 - 2 = -5$.

UM	Cm	Dm	Um	C	D	U	
~~1~~ 0	~~5~~ 15	5	0	0	0	0	→ Minuendo
	7	0	0	0	0	0	→ Sustraendo
	8	5	0	0	0	0	→ Diferencia

Figura 1.

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Es indistinto usar el punto (•) o la equis (x), para expresar la multiplicación de los factores

Completa el siguiente cuadrado mágico con número enteros de manera que los productos de los números de las columnas sea el mismo que el de las filas y también del de las diagonales.

-1		1
1		
-1		

Para la multiplicación de números enteros se utiliza la siguiente regla de los signos:

1. (+) · (+) = +
2. (–) · (–) = +
3. (+) · (–) = –
4. (–) · (+) = –

Siendo a, b y c números enteros, se cumplen las siguientes propiedades para la multiplicación:

1. Clausura: $a \cdot b$.
2. Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.
4. Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$.
5. Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Multiplicación y división de números enteros

¿Cómo representas la siguiente suma (+ 3) + (3) + (+ 3) + (+ 3) en producto?

Multiplica con números enteros

Si un frízer tiene la capacidad de disminuir la temperatura de un producto 2º C por minuto. ¿Cuántos grados centígrados habrá disminuido la temperatura del producto al cabo de 6 minutos?

Veamos cómo se puede resolver esta situación. Si cada minuto el frízer disminuye la temperatura del producto en 2 ºC, entonces, al transcurrir 6 min, tendremos que sumar 6 veces el –2:

$(-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -12$

Esto significa que al cabo de 6 minutos el frízer bajó la temperatura del producto 12 ºC.

Otra forma de resolver esta misma situación es representando la suma anterior como una multiplicación. Es decir:

$(-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = (+6)\,(-2) = (+6) \cdot (-2)$.

Para **multiplicar dos números enteros**, se multiplican los valores absolutos de los números (denominados factores) y se añade el signo, según la **regla de los signos:**

$(+6)\cdot(-2) = -(6 \cdot 2) = -12$.

En este caso, aplicamos la tercera y cuarta regla de los signos que dice: *si los factores son de distinto signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es negativo*.

Igualmente, cuando: *los factores son de igual signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es positivo*. Por ejemplo,

- $(-7) \cdot (-8) = +(7 \cdot 8) = +56$
- $(+9) \times (+6) = +(9 \times 6) = +54$.

Multiplica tres o más números enteros

Para multiplicar tres o más números enteros, se multiplican los valores absolutos de ellos. Luego, se toma en cuenta lo siguiente:

- Si todos los factores son positivos, el producto es positivo.

$$(+7) \cdot (+6) \cdot (+2) \cdot (+4) = +336.$$

- Si el número de factores negativos es par, el producto es positivo.

$$(-8) \times (-4) \times (-3) \times (-9) = +864.$$

- Si el número de factores negativos es impar, el resultado es negativo.

$$(-2) \times (-21) \times (-13) \times (-4) \times (-9) = -19{,}656.$$

División de números enteros

Para dividir un número entero (dividendo) entre otro entero (divisor), se dividen los valores absolutos de los números y se añade el signo + o –, según la regla de los signos; la cual para la división coincide con la del producto. Esto se debe a que la división es la operación inversa de la multiplicación.

$\frac{-8}{+2}=-\frac{|-8|}{|+2|}=-4$, porque $(-8) = (+2)\,(-4)$.

La división también se puede representar como sigue:

$\frac{-8}{+2}=(-8)\div(+2)$.

Trina, Joselyn y Paola son primas y quieren comprar un regalo de cumpleaños para su tía Wendy, que le gusta mucho ir a la playa, se deciden por un vestido playero que tiene un costo de RD$ 1,269. ¿Cuánto tendría que poner cada una, a partes iguales, para comprar el regalo a la tía?

Solución: para saber cuánto tienen que poner cada una de las primas, se plantea una división del costo del regalo: 1,269 entre 3 que representa el número de primas, ya que se sabe que cada una debe poner la misma cantidad. Por lo tanto, $\frac{1{,}269}{3} = 423$, porque $3 \times 423 = 1{,}269$ (ver figura 1). Finalmente, cada una de ellas tuvo que poner RD$ 423 para comprarle el regalo a la señora.

- **Calcula:**
  - $(-3) \times (+9)$.
  - $(-44) \cdot (-37) \cdot (-13) \cdot (-12)$.
  - $(+21) \div (-7)$.
  - $\frac{-210}{+70}$.
  - $(-22{,}103) \times (3{,}135)$.
- Un tinaco de 1,200 litros tiene una fuga y pierde 40 litros por hora. ¿En cuánto tiempo se vaciaría el recipiente, si no se **corrige** la fuga?

La división exacta de dos números enteros se puede escribir:
D/d=c lo que es igual a D=d·c.
Donde, D = dividendo, d = divisor diferente de cero y c = cociente.

La división de dos números enteros no siempre es un número entero, por ejemplo, (+ 8) / (+ 3). La división de un número entero entre el cero, no está definida.

Al multiplicar el número - 23 diez veces por el mismo, ¿qué signo tiene el producto?

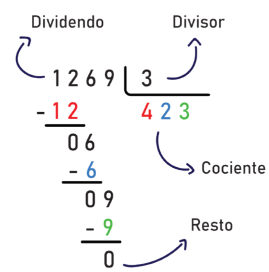


Figura 1.

- Aplica en el marco de la ética ciudadana los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadística de números naturales y enteros para contribuir con la preservación del medio ambiente y la toma de decisiones en favor de la comunidad, respetando las diferencias de opiniones de los demás.

Potencia y operaciones combinadas en $\mathbb{Z}$

Potenciación de un número entero: es una manera abreviada de escribir la multiplicación del número entero a por sí mismo, n veces. Simbólicamente:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\ veces} = a^n$$

El factor a se denomina base, la cantidad de veces que aparece tal factor será el exponente (n) de a. Y el resultado de tal operación se denomina *potencia*.

Propiedades	Ejemplo
La potencia con exponente 0, donde la base $\neq 0$.	$(-250)^0 = 1$
La potencia con exponente 1.	$(1000)^1 = 1000$
Producto de potencias con la misma base.	$(-2)^5 \cdot (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128$
División de potencias con la misma base.	$(-2)^5 \div (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$
Potencia de una potencia.	$[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$

Practica las operaciones combinadas con números enteros.

¿Cómo se expresa en potencia el siguiente producto (–3) x (–3) x (–3)?

Calcula la potencia de base un número entero y exponente un número natural

La potencia de base un número entero y exponente un número natural, es el número entero que resulta de multiplicar la base por sí misma, tantas veces como indique el exponente, y su signo depende del signo de la base.

Si la base es positiva el resultado es positivo: $(+3)^2 = (+3)\cdot(+3) = 9$.

Si la base es negativa, el resultado será positivo si n es **par** o será negativo si n es **impar:**

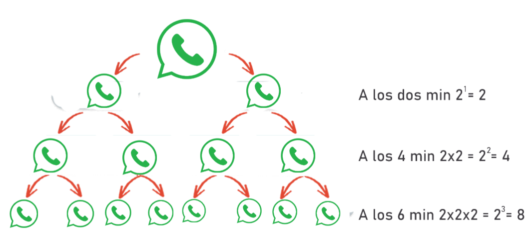
Ejemplo: a. $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = +4$. b. $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$.

Aplica potencia en la resolución de problemas

Una persona manda un mensaje por WhatsApp a dos amigos, 2 minutos después de haberlo recibido. Sus amigos lo envían a otras dos personas dos minutos después, y así sucesivamente lo hace cada persona que recibe el mensaje. Pasados 6 minutos, ¿cuántos mensajes por WhatsApp se han mandado en total? ¿Cuántas personas recibirán el mensaje 12 minutos después que la primera persona lo ha enviado?

Hagamos un gráfico para entender la situación. En él se observa lo que sucede cada vez que el mensaje se envía cada 2 minutos.

A los 6 minutos, se puede concluir que el mensaje se envió a 8 personas. Para determinar cuántas lo recibieron a los 12 minutos, puedes seguir construyendo el gráfico o simplemente calcular la siguiente potencia 26 = 64, donde el exponente (6) representa la cantidad de veces que el mensaje se ha enviado y la base (2) el número de personas que envía el mensaje. Se concluye que a los 12 minutos el mensaje lo han recibido 64 personas.



Realiza operaciones combinadas

Las operaciones se realizan de izquierda a derecha. Es decir, si tenemos una multiplicación y una división se realizará primero la operación que más se ubique a la izquierda. Si tenemos solo sumas y restas, se realizan en primer lugar la operación que queda más a la izquierda.

Ejemplos: Resolver las siguientes operaciones combinadas

(– 2) · (– 40) : (+8) – (+12)	- 6 + {4+[(-10) (-20 + 8)}
80 : (+8) – (+12)	-6 + {4+[(-10) (-12)]}
10 – (+12)	-6 + (4 + 120)
–2	-6 + (+ 124)
	+118

Resuelve el problema: en el proceso industrial de un matadero avícola, se deben congelar grandes cantidades de aves ya faenadas, para lo cual posee una cámara de congelación que baja la temperatura en 5 ºC cada 10 min. Si la cámara de congelación tiene una temperatura inicial de 15 ºC, en cuánto tiempo descenderá la temperatura a -35 ºC.

Solución: para conocer el tiempo que tarda la cámara de congelación en alcanzar la temperatura de -35 ºC es necesario plantear varias operaciones, como se muestra a continuación:

Se realiza la diferencia entre la temperatura final y la temperatura inicial: (-35) – 15 = -50.

Se divide entre la cantidad que desciende la temperatura: $\frac{-50}{-5}=10$

Se multiplica por 10 para calcular el tiempo total 10 x 10 = 100. Por lo tanto, la cámara tarda 100 min en alcanzar los – 35 ºC.

- **Realiza** las siguientes operaciones combinadas y luego comprueba con la calculadora:
  - 100: 20 · 3 - (4 – 5 + 6) · (-1).
  - {[(2) – (–4) · (+ 3)] + [(16): (– 4) – 6] + 6}.
- En una caja hay 5^2 docenas de huevos. Si se tienen 3^2 cajas, ¿cuántos huevos hay en total?

Cuando realizamos operaciones combinadas, estas se han de resolver en un orden.

- Primero: Paréntesis, corchetes y llaves. (Se efectúan las operaciones que están dentro de estos).
- Segundo: Potencias.
- Tercero: Multiplicaciones y divisiones.
- Cuarto: Sumas y restas.

Practica las operaciones combinadas con números enteros.

https://www.geogebra.org/m/kvmzuv9s

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Actividad grupal

Nos vamos de compras

¿Qué haremos?

Una de las situaciones más cotidianas en la que necesitaremos operar con números es ir de compras. Normalmente nos llevamos artículos, pero también es frecuente que devolvamos algo que hemos comprado. Por lo que, en esta actividad, tendremos que: identificar los precios de los artículos que queremos comprar, asignar correctamente los signos, según compremos o devolvamos y calcular cuánto debemos pagar, o reintegrar, según corresponda y calcular, cuánto nos queda luego de realizar la compra.

¿Qué necesitamos?

Lápices, papel para escribir, calculadora.

¿Cómo nos organizamos?

Formar equipos de cuatro integrantes donde todos tienen igual responsabilidad para la ejecución de la actividad, manteniendo siempre la cordialidad y respeto por las opiniones de los demás integrantes del grupo.

¿Cómo lo haremos?

El equipo se reúne para ejecutar en colaboración, las actividades que se describen a continuación:

Actividad 1: resolver los problemas de compras.

Problema 1. Martha va a la tienda El Girasol a comprar algunos artículos que necesita y a devolver otro. Ella lleva 3,000 pesos. Compra 2 gorras, una mochila y devuelve un pantalón, que había comprado previamente. ¿Cuánto gastó en la compra? ¿Cuánto dinero le quedó?

Problema 2. Carlos ganó un bono de 2,400 pesos para comprar en la tienda El Girasol. ¿Qué artículos de la lista puede comprar, para acercarse lo más posible al monto del bono? ¿Cuánto gastó Carlos en la compra? ¿Con cuántos pesos se quedó la tienda? Recuerda que la tienda no regresa el dinero y tampoco puedes superar el monto del bono.

Actividad 2. Preparar una lista de compras para compartir una merienda.

Para celebrar la culminación del proyecto, los integrantes de este grupo deciden hacer una merienda. Para ello cada uno aporta 100 pesos. Les corresponde hacer una lista de los artículos que pueden adquirir, con sus respectivos precios. Luego de realizar la compra, ¿cuánto dinero les sobró? Si el dinero sobrante lo deciden repartir entre los integrantes del equipo, ¿cuántos pesos le toca a cada uno?

Presentación y socialización de la actividad

Elaboren una presentación, para compartir el resultado de este trabajo con toda la clase. Luego, expliquen cada uno de los pasos que los llevó a cada resultado.

Coevaluación

Cada miembro del equipo escoge a otro compañero y describe brevemente: cómo contribuyó al trabajo del equipo y qué debe mejorar, para próximas actividades colaborativas.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo responde las siguientes preguntas: ¿cómo ha sido mi actitud frente al trabajo en equipo?, ¿qué aprendí en esta unidad?, ¿he respetado las opiniones de los demás?

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Evaluación

- Dibuja una recta numérica marcada con números enteros del –3 al 3.
- ¿Cuántos segmentos de unidad hay del –2 al 3, en la recta numérica que dibujaste en la respuesta anterior?
- Escribe los dos enteros indicados en esta recta numérica, usando un símbolo de comparación entre los enteros, para mostrar cuál es mayor.

- En la recta anterior ¿qué número entero está a seis segmentos de unidades a la derecha de –4?
- Ordena los números siguientes y represéntalos en la recta numérica:
  - –3, +2, –4, –1, 0, –2, +4, –5.
  - –5, +6, –1, +5, +3, 0, –2, +4, –8.
- Calcula:
  - |-9| • |16| • |0| • |-3.559|
- Calcula:
  - (–41) + (+11)
  - (–23) + (+24)
  - (+54) + (+72)
  - (–1,435,920) + (+1,048.321)
  - (–3) – (–5)
  - (+30) – (+35)
  - (+100) – (–101)
  - (–1,324,600) – (1,324,500)
- Para cada caso, escribe un número entero que cumple la condición.
  - Su valor absoluto es menor que 4 y está entre – 8 y 0.
  - Su valor absoluto es 9.
  - Su valor absoluto es igual al de 24.
  - Es el opuesto del número cuyo valor absoluto es 5.
- Verifica las propiedades de la adición y la multiplicación de enteros con los números –2, 11 y – 4.
- En la siguiente tabla, ¿qué números completan los recuadros de color blanco?

÷	3	-5	6	-2
-18				
135				
–1,596				
16,605				
79,704				

- Calcula, paso a paso:
  - [d) (7 – 6) · 4
  - 2 – (–4)] · (2 + 3)
  - (–3) · (–4) + (–5) · (–10)
  - [(– 8) : (4) + 7] · (–3)
  - (– 4) : (– 2) : 2.
  - (– 5) · (10 –13) + 26
- Escribe:
  - El número (+22) como suma de dos enteros positivos.
  - El número (–8) como suma de dos enteros negativos.
  - El número (–2) como suma de un entero positivo y otro negativo.
  - El número (+14) como suma de un entero negativo y otro positivo.
- Pitágoras nació el año 570 a. C. y murió el año 490 a. C. ¿Cuántos años vivió?
- Selecciona la respuesta correcta en cada caso
  - Si en Constanza, a las 5 de la mañana el termómetro marca –2 grados y a las 2 de la tarde está marcando 18, ¿cuál es la diferencia de temperatura?

    • 16 • – 20 • 20 • – 16
  - ¿Cuál es la solución correcta de 32 + 33?

- • 65 • 15 • 35 • 36

- ¿Cuál es el resultado de – 52?

  • – 5 • 5 • 10 • – 10

- Expresa con un número entero, la siguiente frase: Esther debe ciento cincuenta pesos.

  • 150 • – 150 • 100 • 50

- Busca una expresión matemática del saldo de Andreina, sabiendo que:" Andreina le debe 50 pesos a Luis, también debe100 pesos en el colmado y ayer ganó 600 pesos en el salón".

  • 100 + 600 -50 • – 100 – 600 + 50

  • 100 – 600 + 50 • – 100 + 600 – 50

- ¿Cuál es la solución correcta de −2+(−6)·(3)?

  • −24 • −20 • −22 • −36

- ¿Cuál es la solución correcta de (1 - 4)2?

  • – 9 • −16 • 6 • – 6

- La temperatura en la cima del Pico Duarte, a las 2 de la mañana, era de - 3 grados centígrados. A las 10 de la mañana era de 16 grados, pero durante una fuerte lluvia a las 12 del mediodía la temperatura descendió 10 grados. ¿Cuál fue la variación entre las 2 de la madrugada y las 12 del mediodía?

  • 18 • 14 • 6 • 8

- La mamá de Evelyn compró un vehículo que le costó RD$ 1,150,000 y pagó una inicial de RD$325,000. ¿Cuánto le falta a la mamá de Evelyn para terminar de pagar el vehículo?

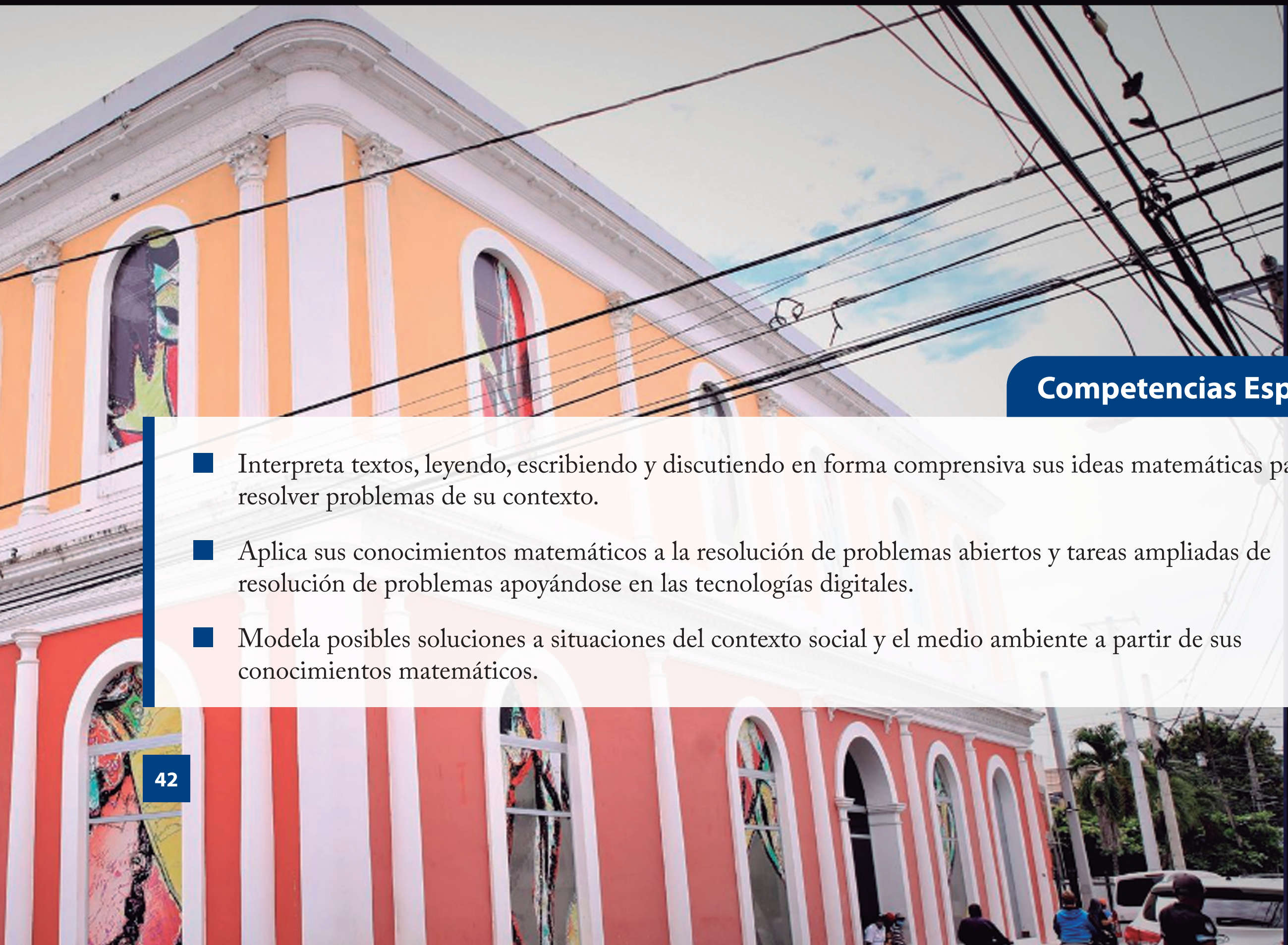
- Kevin está en su clase de cocina y el profesor le explica que, para cocinar vegetales, tales como brócoli, zanahoria, coliflor, vainitas, etc., estos se deben sumergir en agua a una temperatura de 120 ºC por un tiempo de 4 min, para pasarlos inmediatamente, a un tazón lleno de agua con hielo a una temperatura de 6 ºC., para que conserven su color y queden con una textura crujiente. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre ambos procesos?

- Una comunidad agrícola, en Jarabacoa, utiliza un estanque de agua para riego que tiene una capacidad 1,800,000 litros, el mismo se llena de manera natural, gracias a un arroyo que vierte sus aguas en él. Las necesidades de agua para regar esos cultivos son 30,000 litros diarios y por efectos de la sequía el arroyo sólo aporta 20,000 por día. ¿En cuánto tiempo se secará el estanque?

- Paula y su mamá tienen una pastelería y les llegó un pedido extraordinario de 25 bizcochos, ellas saben que para elaborar cada uno de ellos se necesitan 8 huevos y tienen 6 cartones de estos en la pastelería. ¿Crees que esa cantidad les alcance? Explica tu respuesta.

- Una sala de conciertos tiene 33 filas de 52 sillas por fila. Si se va a realizar un evento, a beneficio de una casa hogar para ancianos, y el costo de la entrada es de RD$ 200, ¿cuál sería el monto total recaudado, si se venden todas las entradas?

- Una sala de conciertos tiene 3^3 filas de 5^2 sillas por fila. Si se va a realizar un evento, a beneficio de una casa hogar para ancianos, y el costo de la entrada es de RD$200, ¿cuál sería el monto total recaudado, si se venden todas las entradas?



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.

Unidad 3

Los números decimales y fracciones

Situación de aprendizaje

El carnaval de La Vega es el más importante de la República Dominicana, sus diablos cojuelos, comparsas, carrozas y destacados artistas nacionales e internacionales complementan la oferta cultural de uno de los más famosos carnavales de toda la región del Caribe.

Un grupo de turistas extranjeros llega a la Vega para conocer y disfrutar de su carnaval. La mitad del grupo se va directamente a ver el desfile de comparsas, la cuarta parte se dirige a conocer su hermosa catedral y el resto va a una visita guiada al Museo Carnaval Vegano.

¿Cómo se representa esta situación utilizando fracciones?

Si el total de turistas es 48, ¿qué cantidad de turistas se dirigió a cada lugar? Y, ¿qué porcentaje representa esa cantidad?

Contenido

- Números decimales y valor de posición
- Fracciones y decimales
- Comparación, suma y resta de fracciones
- Multiplicación y división de fracciones
- Razones, proporciones y porcentajes
- Actividad grupal
- Evaluación

Números decimales y valor de posición

¿Porqué el número 3.054 no tiene siguiente?

Lee acerca de los números decimales

Un número decimal es un número compuesto por una parte entera y una parte decimal. Se usan para representar números que estén comprendidos entre dos enteros consecutivos.

Ejemplos:

- 1.5 es un número decimal y está comprendido entre el 1 y el 2, la parte entera es 1 y la parte decimal 5.
- - 24.6306 está comprendido entre el -25 y el -24, la parte entera es -24 y la parte decimal 6306.

En la vida diaria utilizamos los decimales para expresar, entre otras cosas, los milímetros en las mediciones de longitud, las décimas de los grados de temperatura, las compras en el supermercado y los gramos y miligramos en las mediciones de peso.

Determina el valor de posición de un número decimal

Los números decimales se leen de dos formas:

1. Mencionando la parte entera antes del punto y luego mencionando las cifras de la parte decimal uno a uno. Por ejemplo, 213.678952 se lee doscientos trece y seis, siete, ocho, nueve, cinco y dos.

2. Usando el valor posicional: la parte entera se lee igual que los números enteros. El valor de posición de la parte decimal comienza a contarse de izquierda a derecha del punto: las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas.

El número decimal 213.678952 se lee doscientos trece unidades y seiscientos sesenta y ocho mil novecientos cincuenta y dos millonésimas.

Ejemplo. Usa palabras para nombrar cada número decimal.

13.678: trece con seiscientos setenta y ocho milésimas.

-3.00009: menos tres unidades y nueve cienmilésimas.

0.6708: seis mil setecientos ocho diezmilésimas.

Usamos un punto decimal como punto de referencia, como una indicación, para que sepamos dónde terminan los lugares de números enteros y comienzan los lugares decimales.

Existen tres formas en las que podemos usar palabras para nombrar a los números decimales.

Forma 1: nombramos la parte entera, escribimos "punto", nombramos la parte decimal y luego escribimos el valor posicional del último dígito. Por ejemplo, 3.32: tres, punto treinta y dos centésimas.

Forma 2: nombramos la parte entera, escribimos "con", nombramos la parte decimal y luego escribimos el valor posicional del último dígito. Por ejemplo, 3.32: tres, con treinta y dos centésimas.

Forma 3: nombramos la parte entera, escribimos "unidades y", nombramos la parte decimal y luego escribimos el valor posicional del último dígito. Por ejemplo, 3.32: tres unidades y treinta y dos centésimas.

Si tomamos una unidad, es decir, 1, podemos dividirla en 10 partes iguales. Cada una de éstas podrá expresarse como $\frac{1}{10}$ o 0.1. Con 10 de estas unidades, llamadas décimas, podemos formar el número 1, ya que, 10 x 0.1 = 1. A su vez, cada décima puede dividirse en 10 partes iguales, cuyo valor unitario es $\frac{\frac{1}{10}}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01$ y que denominamos centésimas.
Y así sucesivamente, para las siguientes unidades decimales: milésimas $\frac{1}{1000}$ diezmilésimas $\frac{1}{10000}$, cienmilésimas $\frac{1}{100000}$, millonésimas $\frac{1}{1000000}$,…

Ejemplo. Escriba en números los siguientes números decimales:

Nueve millonésimas: 0.000009

Cuatro unidades y mil doscientas cuatro diezmilésimas: 4.1204

Compara y ordena números decimales

Para comparar números decimales primero se compara la parte entera de ambos decimales, es decir se toma en cuenta los valores posicionales: las unidades, las decenas, centenas, etc. Luego se analizan los valores posicionales de la parte decimal: las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas y cienmilésimas.

Ejemplos. Compara cada par de números decimales

- -12.564 y -4.26.

La parte entera de -12.564 es menor que la parte entera de -4.26, por lo tanto -12.564 es menor que -4.26.

- 12.567 y 12.361.

Las partes enteras de ambos números decimales son iguales, por lo que se pasa a comparar las décimas: las décimas de 12.567 son mayores que las décimas de 12.361, por lo tanto 12.567 es mayor que 12.361.

- 32.517 y 32.56.

Las partes enteras de ambos números decimales son iguales, las décimas también son iguales: ambos números tienen 5 décimas, por lo que se pasa a comparar las centésimas: 32.517 tiene una centésima y 32.56 tiene 6 centésimas, por lo que 32.517 es menor que 32.56.

- **Usa** palabras para nombrar cada número decimal:
  - 8.9032
  - 24.4256
  - 0.12500
  - 10.075203
- **Usa** dígitos para escribir cada número decimal:
  - Cuarenta y cinco con nueve mil seiscientos cuatro milésimas.
  - Setenta y ocho mil setecientos seis cienmilésimas.
  - Dos unidades con quinientos cincuenta mil dos millonésimas.

Cuando se tienen dos decimales negativos, el más cercano a cero es el mayor. Mientras más lejano está el decimal negativo de cero, menor es su valor.

Puedes agregar uno o más ceros al final de un número decimal sin cambiar el valor del número. Por ejemplo, puedes escribir 0.3 como 0.300. El cero no cambia el valor del número, porque no cambia el valor posicional del 3. En ambos números, el 3 está en el lugar de las décimas. Así, tres décimas es igual a trescientas milésimas.

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Aa

Magnitudes discretas: son aquellas cuya cantidad se determina contando el número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, los días de la semana, cantidad de alumnos en un curso, cantidad de lápices en una caja, entre otros.

Magnitudes continuas: son aquellas cuya cantidad se determina por medición. Por ejemplo, estatura, peso, área, volúmenes, tiempo, entre otros.

Decimal exacto: es un número cuya parte decimal tiene un número finito de cifras. Ejemplo: $\frac{3}{5} = 0.6$

Decimal periódico puro: es un número cuya parte decimal se repite indefinidamente. Ejemplo: 1.333… donde 3 es el período.

Decimal periódico mixto: es un número cuya parte decimal consta de un **anteperíodo**, seguido de un número que se repite indefinidamente (**período**).

Ejemplo: 1.51444… donde

$\underbrace{51}_{\textit{Anteperíodo}} \qquad \underbrace{4}_{\textit{Período}}$

Una fracción describe parte de un todo. El "todo" puede ser una sola cosa, como un bizcocho entero o una pizza entera, o el "todo" puede ser un grupo, como toda una clase de estudiantes o una funda entera de caramelos.

Las fracciones vistas como el todo, como unidad hacen referencia a que hemos dividido un trozo en partes iguales y después hemos elegido varias de esas partes.

Fracciones y decimales

¿Cuántos decimales tiene la fracción $\frac{1}{3}$?

Define fracciones como una relación

Para definir las fracciones como una expresión de la relación entre una parte y el todo, necesitamos considerar tres aspectos:

1. Un todo, considerado como unidad.

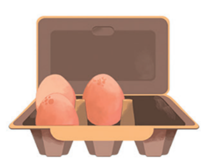
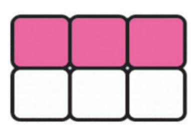
2. Una porción de ese todo en b partes iguales ($b>0$).

3. La referencia a un número a de esas partes.

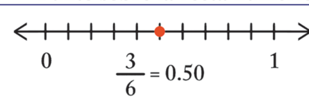
Por lo que, podemos decir que una fracción es una o varias partes iguales en las que se divide la unidad y se expresa simbólicamente como a/b, dónde $b>0$. Por ejemplo, en la fracción $\frac{3}{6}$ distinguimos el numerador (3) y el denominador (6). Esto significa que el todo, que es 6, se fracciona en 6 partes iguales, para considerar 3 de esas partes.

Identifica diferentes formas de representar a las fracciones

Ejemplo 1: observa la representación de la fracción $\frac{3}{6}$, vista como una relación parte/todo.

Representación de la fracción $\frac{3}{6}$		
Numérica/ Verbal	**Gráfico discreto**	**Gráfico continuo**
$\frac{3}{6}$ "los tres sextos de…"	La huevera tiene capacidad para 6 huevos y hemos colocado 3. 	Número de cuadrículas sombreadas (3) con respecto al número total de cuadrículas congruentes (6). 

Ejemplo 2: observa a la fracción $\frac{3}{6}$ como una medida de magnitud comparada con la unidad.

Decimal	Punto sobre la recta numérica
$\frac{3}{6} = 0.50$	

Representa números decimales y fracciones como parte de la unidad

Se representa la parte entera y luego se procede a dividir la unidad en décimas, centésimas, milésimas u otros. Según sea el caso, por ejemplo, para 2.6 se construyen dos cuadrados iguales que representan dos unidades. Luego, a otra unidad cuadrada la dividimos en 10 partes iguales, para colorear 6 de sus partes, las cuales representan las 6 décimas.

Es así como podemos observar que los números decimales y las fracciones tienen una gran relación. Una fracción es una parte de un todo. Por ejemplo, la fracción $\frac{6}{10}$ nos indica que de una unidad que está dividida en 10 partes iguales elegimos 6 partes.

A continuación, observamos cómo a partir del gráfico anterior se puede obtener la fracción $\frac{26}{10}$ del decimal 2.6.

$$\frac{10}{10} = 1 \qquad \frac{10}{10} = 1 \qquad \frac{6}{10} = 1$$

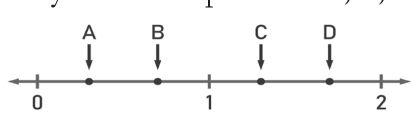
$$2.6 = 2 + 0.6 = 1 + 1 + \frac{6}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{6}{10} = \frac{26}{10}$$

Para conseguir un número decimal a partir de una fracción solo tenemos que dividir. Por ejemplo,

$$\frac{1}{5} = 0.2;\ \frac{8}{3} = 2.666\ldots;\ \frac{23}{15} = 1.5333\ldots$$

0.2 es un **decimal exacto,** 2.666… es un **decimal periódico puro** y 1.533… es un **decimal periódico mixto**.

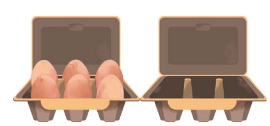
- ¿Qué fracción y decimal representa A, B, C y D?



$\frac{6}{2}$= -3, donde -3, se puede escribir como -3.00… , por lo tanto los números enteros también son decimales periódicos puros.

Por lo que se puede concluir que todos los decimales que se obtienen de las fracciones son exactos o periódicos (puros o mixtos)

¿Cuántas docenas de huevos son 6 huevos?



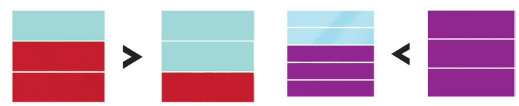
- Aplica el razonamiento lógico para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana en las que se utilicen las fracciones, los números decimales y los enteros.

Comparación, suma y resta de fracciones

¿Cuál fracción es mayor $\frac{5}{7}$ o $\frac{6}{7}$? ¿Por qué?

Compara fracciones con igual numerador o denominador

Si dos o más fracciones tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador.



$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} < \frac{3}{3}$

Si dos o más fracciones tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

Compara fracciones que tienen distinto numerador y denominador

Si solo se pretende comparar dos fracciones cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$; se multiplican $a{\cdot}d$ y $b{\cdot}c$ y se comparan ambos productos: si $a{\cdot}d > b{\cdot}c$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; si $a{\cdot}d < b{\cdot}c$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; y si $a{\cdot}d=b{\cdot}c$, entonces $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **fracciones equivalentes**.

Ejemplos: determina si las siguientes fracciones son **propias** o **impropias** y luego debes compararlas.

a. $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$ $\qquad$ b. $\frac{13}{7}$ y $\frac{14}{4}$ $\qquad$ c. $\frac{6}{15}$ y $\frac{12}{30}$

- Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$ son propias (sus características coinciden con la definición). Para compararlas, se multiplica $2 \cdot 8 = 16$ y $5 \cdot 3 = 15$, luego se comparan ambos resultados (16 y 15). Como $16 > 15$, entonces se concluye que: $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$.

- Las fracciones $\frac{13}{7}$ y $\frac{14}{4}$ son impropias (sus características coinciden con la definición). Para compararlas, se multiplica **$13 \cdot 4 = 52$** y **$7 \cdot 14 = 98$** , luego se comparan ambos resultados (**52** y **98**). Como **52** < **98**, entonces se concluye que: $\frac{13}{7} < \frac{14}{4}$.

- Las fracciones $\frac{6}{15}$ y $\frac{12}{30}$, son propias (sus características coinciden con la definición). Para compararlas, se multiplica **$6{\cdot}30=180$** y **$12{\cdot}15=180$** , luego se comparan ambos resultados (**180** y **180**). Como **180** = **180**, entonces, se concluye que $\frac{6}{15}$ y $\frac{12}{30}$ son equivalentes.

Aa

Una **fracción es propia**, cuando el valor de la fracción es menor que el valor absoluto de la unidad entera. Es decir, el valor absoluto del numerador es menor que el valor absoluto del denominador.

Ejemplos: $\frac{2}{3}, \frac{25}{257}, -\frac{1}{4}$

Una **fracción es impropia**, cuando el valor de la fracción es igual o mayor que el valor absoluto de la unidad entera. Es decir, el valor absoluto del numerador es igual o mayor que el valor absoluto del denominador.

Ejemplos: $-\frac{15}{3}, \frac{27}{4}, \frac{6}{6}$

Fracciones equivalentes son aquellas que representan el mismo valor, aunque el numerador y el denominador sean diferentes.

Al descomponer una fracción impropia en un número entero y una fracción propia, se forma una nueva fracción llamada fracción mixta

Fracción impropia

$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -24 & 6 \\ \hline 3 & \end{array} \rightarrow \frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4} = \boxed{6\frac{3}{4}}$

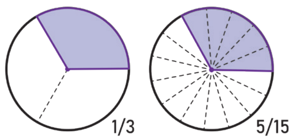
Número mixto

Si dividimos o multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente.

Ejemplo: $\frac{6}{8} \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{9}{12}$

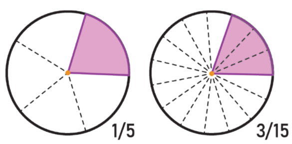
Para facilitar la comparación, suma y resta de fracciones se puede aplicar el método de los productos cruzados; se multiplica el numerador y el denominador de una fracción por el denominador de la otra.

Ejemplo: convertir a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{15}$ a igual denominador, compararlas, sumarlas y restarlas.



Multiplicamos por 5 al numerador y denominador de $\mathbf{\frac{1}{3}}:\frac{\mathbf{1}\cdot 5}{3\cdot \mathbf{5}}=\frac{\mathbf{5}}{15}$

Gráficamente se puede observar que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{1}{15}$



Multiplicamos por 3 al numerador y denominador de $\mathbf{\frac{1}{5}}:\frac{\mathbf{1}\cdot 3}{\mathbf{5}\cdot 3}=\frac{3}{15}$

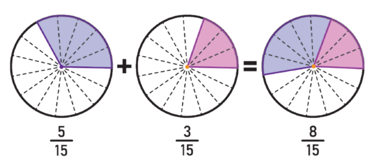
Gráficamente se puede observar que: $\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{3}{15}$

Una vez que ambas fracciones tienen igual denominador, se comparan sus numeradores. La fracción que tenga el numerador más grande es la fracción mayor. La fracción con el numerador menor es la fracción menor.

Observa que en el ejemplo $5>3$, entonces $\frac{5}{15} > \frac{3}{15}$.

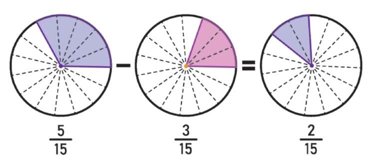
Para sumar ambas fracciones, se colocan ambas fracciones con el mismo denominador y se suman los numeradores:

$$\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{5+3}{15}=\frac{8}{15}$$



Para restar ambas fracciones, se colocan ambas fracciones con el mismo denominador y restamos los numeradores:

$$\frac{5}{15}-\frac{3}{15}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$$



- **Compara** las siguientes fracciones:
  - $\frac{8}{15}$ y $\frac{10}{15}$
  - $\frac{11}{22}$ y $\frac{1}{2}$
  - $\frac{9}{19}$ y $\frac{3}{6}$
- **Escribe** una fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ que tiene un denominador de 48. Luego escribe una fracción equivalente a $\frac{3}{8}$ que tiene un denominador de 48. ¿Cuál es la suma y la resta de las dos fracciones que escribiste?

De una pizza nos comemos los 2/3 y después 1/3. ¿Cuánto nos falta por comer?

Otra forma de sumar fracciones y hacerlo con sus decimales es que simplemente se suman las cantidades decimales. Para el caso de expresiones decimales exactas.

Por ejemplo:

$0.5 + 0.208 - 0.25 = 0.458$.

En el caso de expresiones periódicas, hay que sumar con más cuidado, porque el resultado será probablemente otra expresión decimal periódica.

Por ejemplo:

$0.333\ldots + 0.83 = 1.163\ldots$ Es decir, se trata de extender suficientemente los decimales de los períodos, sumar o restar, y tratar de ver qué nueva fracción periódica se genera.

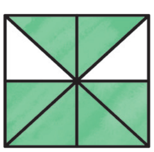
- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

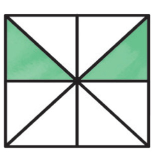
Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores para formar el numerador del producto, y se multiplican los denominadores para formar el denominador del producto.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot c)}{(b \cdot d)}$$

El día del cumpleaños de Evelyn los invitados se comen la mitad del bizcocho, al siguiente día se comen un cuarto del bizcocho y luego Daniel se comió la mitad de lo que quedaba, ¿cuánto quedo del bizcocho?

¿Qué fracción representa la parte coloreada de cada figura? ¿Cuál es la fracción que representa el producto de estas fracciones?



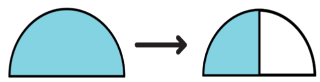


Multiplicación y división de fracciones

¿Cuánto es un tercio de un quinto?

Multiplica fracciones

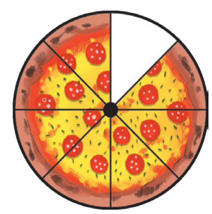
Usando la representación gráfica de fracciones, mostramos cómo calcular un medio de un medio. Para encontrar la mitad de una mitad, dividamos un semicírculo por la mitad. Vemos que la respuesta es un cuarto.



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ es } \frac{1}{4}\text{. Es decir, } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 1: Daniel encontró ¼ de una pizza en el refrigerador y se comió la mitad. ¿Qué fracción de la pizza entera se comió Daniel?



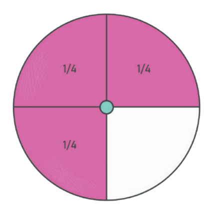
1/2 de 1/4

Solución: la mitad de un cuarto es un octavo

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Daniel comió $\frac{1}{8}$ de la pizza entera

Ejemplo 2: ¿qué fracción es un medio de tres cuartos?

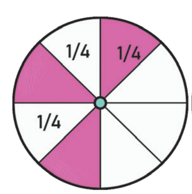
Solución: primero mostramos tres cuartos.



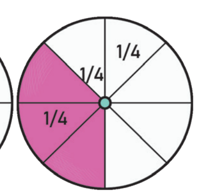
Para encontrar la mitad de tres cuartos, podemos dividir cada cuarto por la mitad, o dividir tres cuartos por la mitad

Como la mitad de un cuarto es un octavo, la mitad de tres cuartos son tres octavos. También podemos encontrar la mitad de tres cuartos al multiplicar.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$



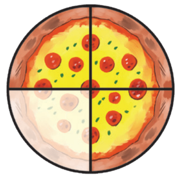
1/2 de 3/4

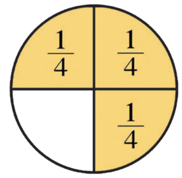


1/2 de 3/4

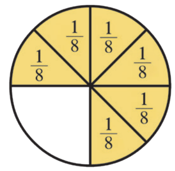
Divide fracciones

Primero, recordemos lo que significa dividir fracciones. La expresión $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ significa, ¿cuántos un octavo hay en tres cuartos? Por ejemplo, ¿cuántas porciones de un octavo de pizza hay en tres cuartos de una pizza?





Si cubrimos los tres cuartos con octavos, podemos ver que hay 6 un octavo $\frac{1}{8}$ en tres cuartos.



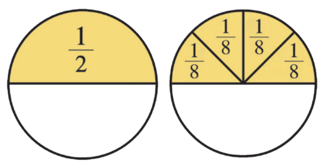
$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$$

Ejemplo 1. ¿Cuántos un octavo hay en un medio?

Solución: esta es una pregunta de división, por lo que se representa

$$1/2 \div 1/8.$$

Para encontrar cuántos octavos hay en una mitad, cubrimos la mitad con octavos y luego contamos los octavos.



Se concluye que hay 4 un octavo (1/8) en 1/2.

Ejemplo 2. Un jardinero gasta 2/3 de litro de agua por cada planta que riega, ¿cuántas plantas puede regar si tiene 10 litros?

Solución: en este caso dividimos los 10 litros de agua entre 2/3 de litro de agua, para determinar la cantidad de plantas que se pueden regar.

$$10 \div \frac{2}{3} = \frac{10}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Se concluye que con 10 litros de agua se pueden regar 15 plantas.

- La mitad de los alumnos son niñas y un tercio de las niñas les gusta **comer** chocolates. ¿Qué fracción de los estudiantes son niñas que les gusta comer chocolates?
- Los alumnos de sexto grado quieren **medir** el largo de la cancha de baloncesto del colegio, que mide 28 y $\frac{16}{25}$ metros de largo, con un listón de madera de $\frac{7}{8}$ de metro. ¿Cuántas veces cabe el listón en la longitud de la cancha?

Para dividir dos fracciones se realiza en producto cruzado, es decir, el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción (se ubica en el numerador) y el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción (se ubica en el denominador), o también se puede invertir la SEGUNDA FRACCIÓN y después multiplicar ambas fracciones.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

O

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Halla la mitad de los tres cuartos de dos tercios de cinco octavos.

Multiplica y divide fracciones en línea

https://www.geogebra.org/m/rDkhDDCJ

- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Aa

La **proporción** es la igualdad de dos razones.

Un **porcentaje** es una forma de expresar una cantidad como una fracción de 100. Se utilizan para expresar proporciones, comparar cantidades y realizar cálculos en muchos campos, incluidos las finanzas, la estadística, las ciencias, los deportes, etcétera

Para formular una regla de tres simple, necesitamos 3 datos: dos magnitudes que son proporcionales entre sí y una tercera magnitud. A partir de esto, encontraremos el cuarto término de la proporcionalidad.

Había 6 calcetines azules y 8 calcetines blancos en el cajón de Daniel.

¿Cuál fue la razón de calcetines azules a calcetines blancos?

¿Cuál fue la razón de calcetines blancos a calcetines azules?

Razones, proporciones y porcentajes

¿Cuál es la diferencia entre el 75 % de una cantidad y los tres cuartos de esa misma cantidad?

Determina razones y proporciones

Una razón es una forma de describir una relación entre dos números o magnitudes.

Ejemplo 1: si hay 12 niños y 18 niñas en una clase, entonces la razón de niños a niñas en la clase es de 12 a 18.

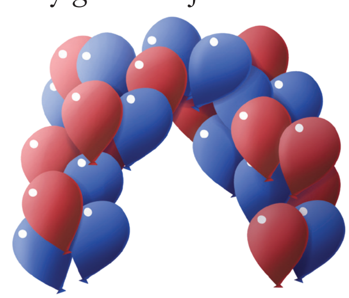
Leemos la razón $\frac{12}{18}$ diciendo "doce a dieciocho". Reducimos razones al igual que reducimos fracciones; es decir, encontramos razones equivalentes o proporción. Como 12 y 18 son divisibles entre 6, dividimos cada término de $\frac{12}{18}$ por 6.

$$\frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}, \text{ luego, } \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Entonces, la razón de niños a niñas en la clase es $\frac{2}{3}$ o 2 : 3. Esto significa que, por cada dos niños en la clase, hay tres niñas.

Ejemplo 2: en el cumpleaños de María se colocaron 14 globos rojos y 16 azules. ¿Cuál es la razón entre globos azules y globos rojos?

Solución: nos piden la razón de globos azules a globos rojos, entonces seguimos el orden de arriba a abajo, escribimos el número de globos azules como numerador y el número de globos rojos como denominador.



$$\frac{\text{Número de globos azules}}{\text{Número de globos rojos}} = \frac{16}{14}$$

Podemos reducir la razón, dado que los términos son 16 y 14 son divisibles entre 2: $\frac{16 \div 2}{14 \div 2} = \frac{8}{7}$

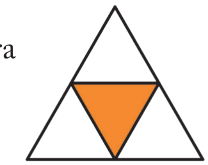
La razón de globos azules a globos rojos es de $\frac{8}{7}$ o 8:7.

Esto significa que, por cada 8 globos azules hay 7 globos rojos.

Determina porcentajes como parte de un todo o un grupo

Al igual que las fracciones, los porcentajes representan partes de un todo. Un todo es 100 por ciento, que abreviamos como 100 %.

Ejemplo: observa el triángulo y la respuesta dada para cada pregunta.



- ¿Qué fracción del triángulo está sombreada? $\frac{1}{4}$.
- ¿Qué porcentaje del triángulo está sombreado? 25 %.

Si leemos que el 50 por ciento de todos los dominicanos desayuna con "Tres golpes", entendemos que 50 de cada 100 dominicanos prefieren este desayuno.

Ejemplo: Si al precio inicial de RD$ 1,500 se le aplicó un descuento de 15 %, ¿cuánto fue el descuento?, ¿cuánto se pagó finalmente?

Solución: para calcular el porcentaje de una cantidad, se multiplica la cantidad por el porcentaje y luego se divide el resultado entre 100.

15 % de 1,500: $\frac{15}{100} \cdot 1{,}500 = 225$

El descuento fue de RD$ 225, y se pagó finalmente RD$ 1,275

Ejemplo 2. Si 8 de los 20 estudiantes son niños, ¿qué porcentaje de estudiantes son niños?

Solución: para calcular el porcentaje que representa 8 de un grupo de 20 se sigue una regla de tres simple. Sabiendo que 20 estudiantes representan el 100 %, tenemos:

$$\frac{20\text{ estudiantes}}{8\text{ niños}} = \frac{100\,\%}{x} \quad '' \quad x\,\frac{8\cdot 100}{20} = \frac{800}{20} = 40$$

Esto significa que, el 40 por ciento de los estudiantes son niños.

- República Dominicana tiene al menos 424 especies de fauna en amenaza: 69 en peligro crítico, 95 en peligro y 260 en vulnerable. El 61 % del total de amenazadas es endémica del país. ¿Cuántas especies de fauna endémicas están en amenaza? ¿Qué número decimal se relaciona con el porcentaje 61 %? ¿Qué porcentaje está en peligro?

La razón suele expresarse como una fracción o colocando dos puntos (:) entre las dos números o magnitudes.

Fuente Que rica vida. com

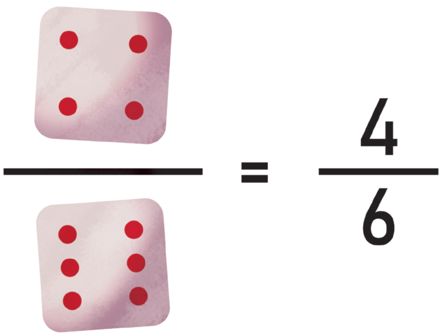
Tres Golpes es el desayuno más representativo de la República Dominicana. Consiste en tres ingredientes fáciles y deliciosos, cuyos sabores y texturas se complementan y son ricos en proteína: queso frito, salami y huevos. Generalmente se sirven con mangú (puré de plátanos verdes), que es esencial en los sabores dominicanos.

Si a la tercera parte de las personas le gusta el chocolate, ¿qué porcentaje de personas le gusta el chocolate?

- Comunica de manera coherente ideas y procesos matemáticos a situaciones del contexto vinculando los conocimientos de patrones numéricos y valor posicional hasta la cienmilésima y los aplica en situaciones de la vida diaria que ameriten cálculos financieros a partir de los conceptos de razón, proporción, porcentaje y tanto por ciento.

Actividad grupal

Representa fracciones jugando con dados

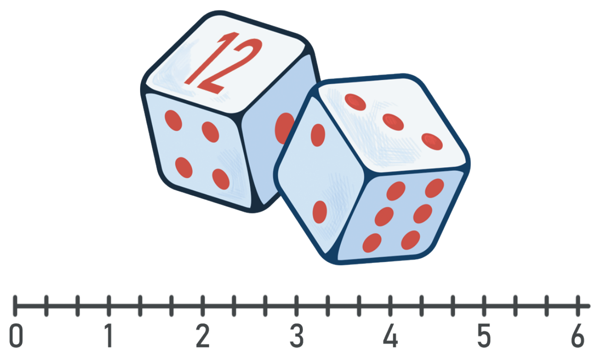


¿Qué haremos?

Representar fracciones en la recta numérica, que se obtienen al lanzar dos dados mediante la utilización de dados.

¿Qué necesitamos?

Papel cuadriculado, 2 lápices de distinto color, dos dados y una tira de papel como se muestra en la imagen. En uno de los dados hay que reemplazar el 5 por un 12.



¿Cómo nos organizamos?

Formar equipos de dos integrantes, donde cada uno tiene igual responsabilidad para la ejecución de las actividades.

¿Cómo lo haremos?

El primer jugador arroja ambos dados y, usando su color, escribe una fracción con los números obtenidos y marca el punto correspondiente en la tira de papel. El dado que tiene el 12 es el que indica el denominador y el otro, el numerador. Luego, el segundo jugador repite el procedimiento. Gana el primero que logra señalar tres puntos en la recta sin que el contrario haya marcado otro entre los mismos.

Condición: Si sale un punto que ya estaba marcado, se escribe la fracción, pero se pasa el turno al otro jugador.

Al finalizar el juego respondan:

a. ¿se superpusieron algunos puntos?, ¿cuáles?

b. ¿por qué se sustituyó el número 5 por el número 12 en el dado del denominador?

c. ¿cuáles son todas las fracciones que se pueden obtener con los dados, de modo que los puntos queden entre 0 y 1?

d) por qué la recta no se extiende más allá del número 6?

Presentación y socialización de la actividad

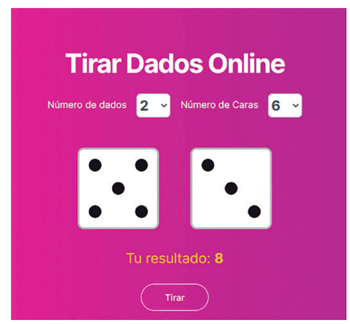
Coevaluación

En cada equipo se abre un espacio de opinión para comentar: cómo contribuyeron los demás miembros en el desarrollo de la actividad y qué se puede mejorar para las próximas actividades grupales.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo responde: ¿cómo ha sido mi desempeño durante la actividad?, ¿qué aprendí con esta actividad?, ¿he respetado las opiniones de los demás?

En este QR encontraras dos dados Online. Puedes usarlos para el juego siempre y cuando recuerdes que debes sustituir en el segundo dado (denominador) el 5 por el 12.



- Explica con precisión ideas matemáticas referidas a la comparación, redondeo y orden con números enteros, fracciones y decimales hasta la millonésima y los vincula con situaciones de su contexto familiar y escolar que demanden operaciones con enteros y cálculos de potencias de base diez en su notación desarrollada.

Evaluación

- La longitud de la hoja de cuaderno era de 0.279 metros. Escribir 0.279 con palabras.
- Usa dígitos para escribir los números decimales:
  - Treinta y tres unidades con quinientos ochenta mil dos millonésimas.
  - Doce unidades con setenta y cinco cienmilésimas.
- Escribe cómo le explicarías a un compañero por qué 0.2 es mayor que 0.0200, si 2 es mucho menor que 200.
- Ordena de menor a mayor los siguientes números:

5. 801; 5.92; 5.087; 5.888; 5.9; 6.001; 5.09; 6.10

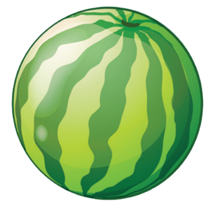
- Comparando fracciones. Coloca mayor, menor o igual según corresponda.

a. 0.4 __ 0.14   b. 1.20 __ 1.020

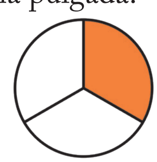
- Un grupo de alumnos resolvió la actividad anterior, dando diferentes argumentos para cada caso. Analízalos y decide si estás o no de acuerdo con ellos y por qué.
  - 0.4 es menor que 0.14 porque 4 es menor que 14.
  - 1.20 es mayor que 1.020 porque 20 es mayor que 0.2.
  - 3.32463 es mayor que 7.54 porque tiene más cifras.
  - El número 3.32463 es menor que 7.54 porque la parte entera 3 es menor que 7.
  - 5.324 es mayor que 5.54, porque el 324 es mayor que el 54.
- Durante una caminata, Miguel descubrió que podía llevar una mochila de la mitad de su peso durante media milla sin descansar. Podía llevar una mochila de 1/4 de su peso durante dos millas sin descansar. Miguel pesa 120 libras.
  - ¿Qué peso podría cargar Miguel durante 2 millas sin descansar?
  - ¿Qué peso de mochila podría llevar Miguel durante solo media milla sin descansar?

  Usa la siguiente información para responder los problemas del 7 al 10.

- Había 10 sandías en el huerto de la mamá de Luis. Una cuarta parte de las sandías era demasiado pequeña, una décima parte era demasiado grande y la mitad era del tamaño correcto. El resto de las sandías aún no estaban maduras.


Fuente: Freepik

  - ¿Cuántas sandías eran demasiado pequeñas?
  - ¿Cuántas sandías eran demasiado grandes?
  - ¿Cuántas sandías eran del tamaño correcto?
  - ¿Cuántas sandías aún no estaban maduras?
- ¿Qué fracción de un pie es una pulgada?
- ¿Qué fracción de una yarda es un pie?
- ¿Qué fracción de una yarda es una pulgada?
- ¿Qué círculo sombreado debajo es equivalente a este círculo sombreado?

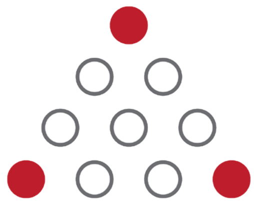


- Identifica cuáles de las siguientes expresiones no representan a la fracción $\frac{1}{3}$:

  a. 1.33… b. 133% c. $1\frac{1}{3}$

  d. $\frac{2}{5} : \frac{6}{5}$ e. $1 + \frac{1}{2}$ f. $\frac{2}{6}$

- Usa tanto una fracción como un decimal para nombrar la parte no sombreada de esta imagen.

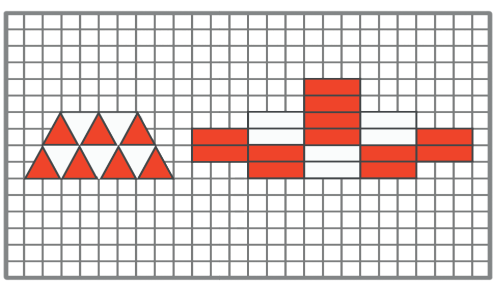


- Un señor tiene 9 vacas y quiere regalar la tercera parte a su hijo, ¿cuántas vacas debe regalar?

- ¿Qué fracción representa el cuadrado rojo del todo?

¿Qué fracción representa el cuadrado rojo del todo?

- Expresa la fracción que representa la parte coloreada de cada figura



- Paula ha leído $\frac{4}{5}$ de su libro ¿Qué fracción de su libro todavía le falta por leer? ¿Qué porcentaje de su libro ya ha leído?

- Cuando el número decimal seis con treinta y cuatro centésimas se resta de nueve con veintiséis centésimas, ¿cuál es la diferencia?

- Efectúe las siguientes sumas de fracciones (hágalo como lo desee):

  • $\frac{2}{5} + \frac{4}{7}$ • 1.5 + 2.3 • $\frac{5}{6} + \frac{16}{7}$

  •3 + 0.06 • $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8}$

- Efectúa las siguientes restas de fracciones (hazlo como lo desees).

  • $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ • $\frac{7}{8} - \frac{2}{5}$ • $\frac{16}{5} - \frac{5}{8}$

- Realiza las operaciones que se indican.

  a. $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ b. $\frac{8}{7} - \frac{3}{8}$ c. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{6}{5}$

- Halla cuatro fracciones equivalentes a cada una de estas: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{7}$

- Realiza las operaciones que se indican.

  a. $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$ b. $\frac{3}{10} : 3$ c. $\frac{1}{3} \cdot \frac{21}{5}$ d. $\frac{11}{7} : \frac{15}{8}$

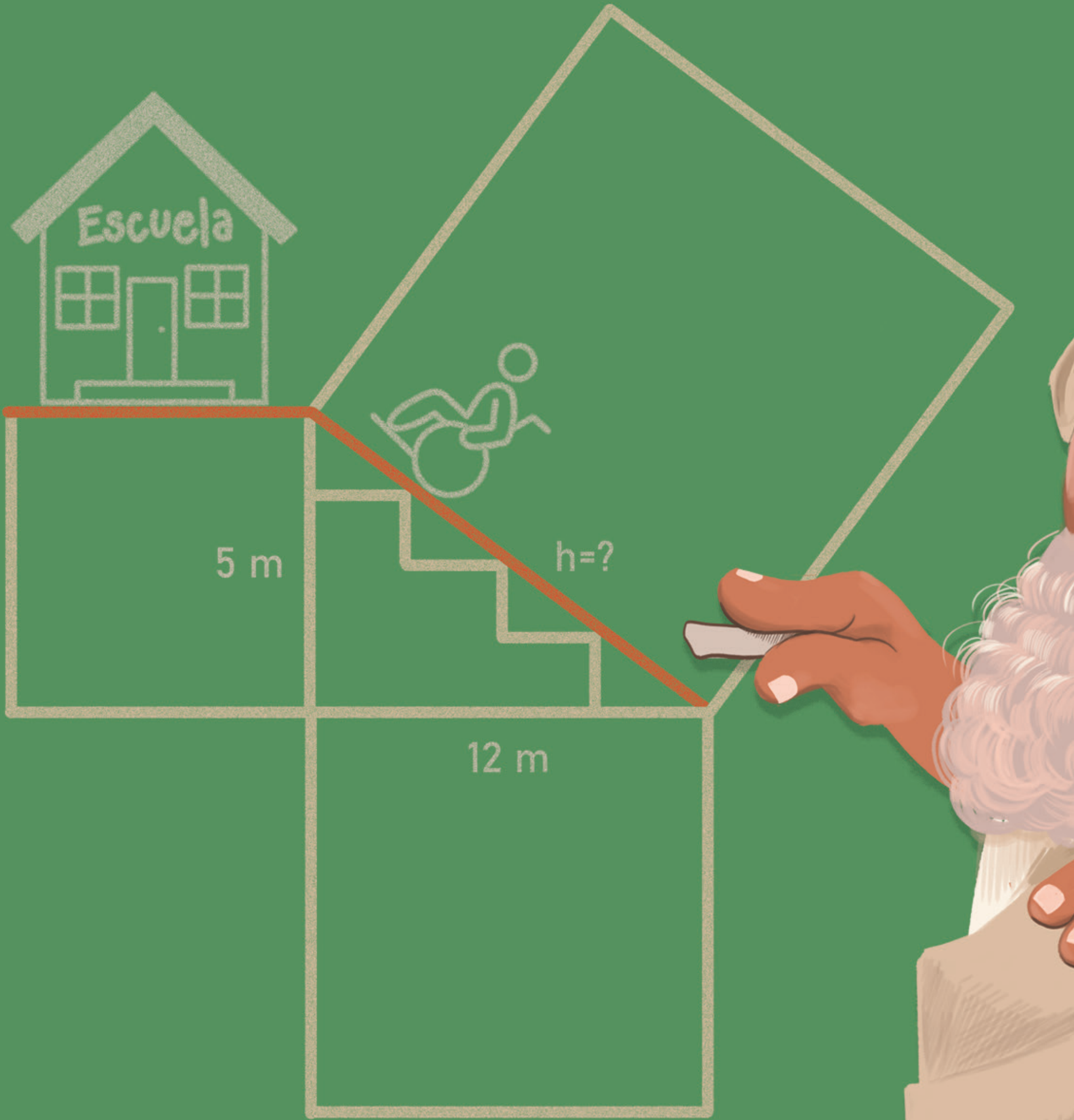
- Paula puede nadar 50 metros en medio minuto. Trina puede nadar 50 metros en 28.72 segundos. ¿Cuál de las dos puede nadar más rápido?

- Representa la parte sombreada de azul de este cuadrado como fracción, como número decimal y como porcentaje.

- Si una funda contiene 50 dulces y 15 de los dulces son de color rojo, entonces, ¿qué porcentaje de los dulces son rojos?

- Si 120 de los 200 estudiantes son niñas, ¿qué porcentaje de estudiantes son niñas?

- Elvira quiere cambiar algunos electrodomésticos de su casa y vende una licuadora y una tostadora, cada uno a 1000 pesos. La licuadora se vende un 15 % por encima de su precio de costo, mientras que la tostadora, a un 15 % por debajo de su precio de costo. Elvira piensa que así ni gana ni pierde respecto a lo que le costaron ambos electrodomésticos. ¿Ella está en lo cierto?



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.

Unidad 4

Los polígonos en el arte y la cultura

Situación de aprendizaje

Para facilitar el acceso a una escuela, se construirá una rampa, en sustitución de la escalinata que allí se encontraba. Tal como puedes ver en la imagen.

¿Cómo puedes deducir la medida de la rampa?

¿Qué idea puedes aplicar para calcularla?

Contenido

- Polígonos y sus elementos
- Construcción de triángulos y cuadrados con el uso de la reglas, el compás y transportador
- Cuadriláteros
- Polígonos inscritos y circunscritos
- El Teorema de Pitágoras
- Actividad grupal
- Evaluación

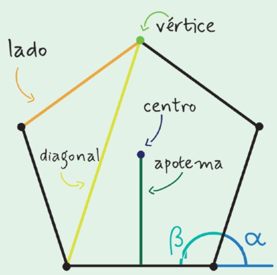
Polígonos y sus elementos

Polígono: es una figura plana cerrada y delimitada por segmentos de recta, que se intersecan en sus extremos. Este término tiene su origen en Grecia. "Polys" significa "muchos" y "gonía" significa "ángulos".

Polígono convexo: es aquel en el que todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.

Polígono cóncavo: es aquel en el que al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180°.

En un polígono podemos identificar los siguientes elementos:



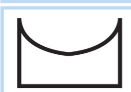
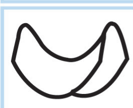
Lados: es cada segmento de recta que delimita el polígono. Suele denotarse indicando las letras para sus puntos extremos.
Vértice: es el punto donde se intersecan dos segmentos contiguos o adyacentes.
Ángulo interior: es el ángulo que determinan dos lados, que tienen un vértice en común y que abarca parte o toda la región interior del polígono. En el ejemplo, β es un ángulo interior.
Ángulo exterior: es el ángulo que determina un lado de un polígono y la prolongación del lado contiguo. En el ejemplo, α es un ángulo exterior.
Diagonal: es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

¿Cuáles ejemplos de polígonos puedes dar?

Distingue polígonos de otras figuras que no lo son

Es importante que distingas los **polígonos** de otras figuras que no lo son, porque representan un concepto geométrico significativo, que surgió como resultado de la observación y abstracción del entorno, como, por ejemplo: de la disposición de ciertas estrellas o cuerpos celestes, la estructura de frutos y flores, e incluso, en las construcciones elaboradas por ciertos animales, tal es el caso de los panales de las abejas.

También, en el arte y la cultura en general, los polígonos han ocupado un papel muy relevante.

Figura	¿Es un polígono?	¿Por qué?
	No	No es una figura cerrada. Observa que existen extremos de segmento que no se intersecan con el extremo del otro segmento.
	No	Ya que uno de sus lados no es un segmento de recta.
	No	Pues no es una figura plana. Observa que se asemeja a una "silla de montar".
	Sí	Es una figura plana, además es cerrada. Y los segmentos que la delimitan se intersecan en sus extremos.

Observa con atención la tabla anterior. En ella se presentan tres figuras que no son polígonos, precisamente por no cumplir con las condiciones de la definición. La figura de la 4.ª fila sí es un polígono.

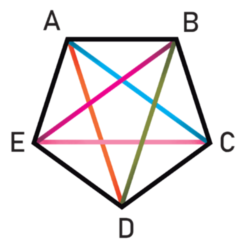
Sus elementos principales son: lados, vértices, ángulos interiores, ángulos exteriores y diagonales.

Clasifica los polígonos

Los polígonos pueden clasificarse según su número de lados en: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octágonos, eneágonos, decágonos, etc. También, atendiendo a la medida de sus ángulos interiores, que puede ser polígono **cóncavo y convexo.**

Observa, por ejemplo, que cualquier triángulo, independientemente de si es equilátero, isósceles (no equilátero) o escaleno, es convexo, ya que cada uno de sus ángulos interiores siempre es menor que 180°.

Verifica la relación entre el número de diagonales y sus lados o vértices (en un polígono convexo)



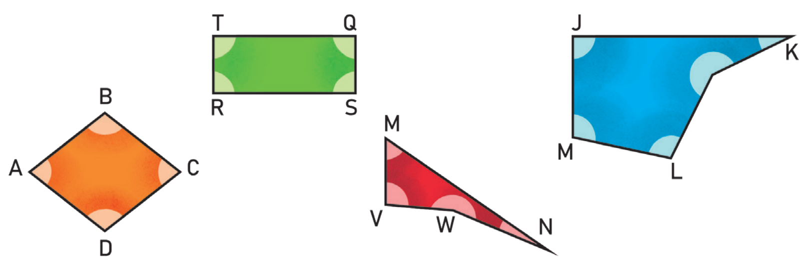
Considera, como ejemplo, el pentágono de la figura ubicada a la derecha. Este posee 5 lados, 5 vértices y 5 diagonales. En este se verifica la siguiente relación:

$$B = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Donde d es el número de diagonales y n el número de lados o vértices.

En efecto, en este caso:

$$d = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot (2)}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$



- En un mosaico se utilizaron losas, como las que se muestran en la figura anterior.

¿Cuáles de ellas son convexas y cuáles son cóncavas? Justifica tu respuesta

Clasificación de los polígonos según su número de lados (n):

n	Clasificación
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
⋮	⋮

La relación: $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ aplica en el caso de los polígonos convexos.

Los motivos geométricos están presentes en el arte rupestre pre-hispánico de República Dominicana.

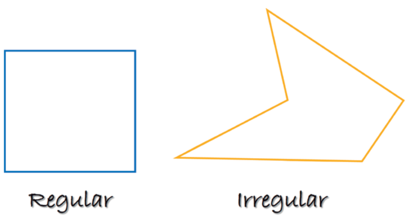
Fuente: https://www.artisticord.com/2018/04/historia-del-arte-dominicano-cronologia.html

- Comunica, de manera coherente, ideas y procesos matemáticos frente a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones y geometría con números decimales y enteros.

Construcción de triángulos y cuadrados con el uso de la reglas, el compás y transportador

¿Qué ejemplos puedes dar de polígonos regulares e irregulares?

Polígono regular: es aquel en el que, todos sus lados tienen la misma medida.
Polígono irregular: es aquel en el que, no todos sus lados tienen la misma medida.
Observa los ejemplos de un polígono regular e irregular.



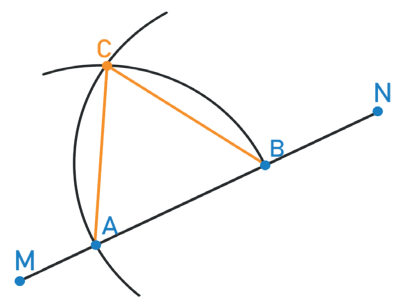
Un área de especial interés en las matemáticas es la construcción de **polígonos regulares** e **irregulares**, con apoyo de instrumentos, tales como la regla y el compás.

Para esta actividad y las siguientes necesitarás regla y compás. La regla, no obligatoriamente debe estar graduada, es decir, no es necesario que tenga marcas para medir, tal como era tradición entre los geómetras griegos.

Construye un triángulo equilátero, utiliza una regla y un compás

Pasos a seguir, empleando regla y compás:

Traza un segmento de recta, puedes etiquetarlo con el símbolo $\overline{MN}$.



Representa un punto A en el segmento $\overline{MN}$.

Con el compás, haz centro en A, con una abertura cualquiera. Luego, traza un arco de circunferencia que interseque al segmento $\overline{MN}$ (a este punto lo llamaremos B), que se extienda hacia uno de sus "lados".

Ahora, con la misma abertura, repite este paso, pero esta vez haciendo centro en B.

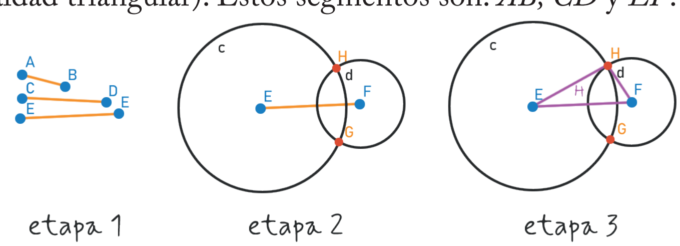
Llama C a la intersección de los dos arcos. Finalmente, traza los segmentos que unen los puntos A, B y C.

El triángulo $\Delta\, ABC$, por construcción, es equilátero.

Construye un triángulo escaleno

¿Cómo puedes proceder?

Etapa 1. Toma como punto de partida tres segmentos (que cumplan la desigualdad triangular). Estos segmentos son: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.



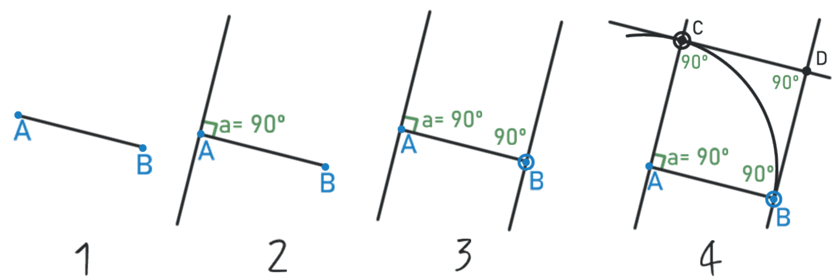
Puedes construir esta figura utilizando Geogebra. Para ello accede a: https://www.geogebra.org/geometry

Etapa 2. Considera el segmento $\overline{EF}$. Con el compás y abertura $\overline{CD}$, haz centro en E y traza una circunferencia. Después, con abertura $\overline{AB}$, haz centro en F y traza otra circunferencia. Observa que las dos circunferencias se intersecan en los puntos H y G.

Etapa 3. Por último, traza los segmentos $\overline{EH}$ y $\overline{HF}$. Observa que, el ΔEHF es escaleno.

Repite esta construcción en tu cuaderno.

Construye un cuadrado, con apoyo en un transportador



(1) Traza el segmento AB , (2) con apoyo en un transportador, traza por A una perpendicular a este segmento, (3) repite este paso, pero en el punto B, y (4) con el compás, traslada la medida AB al segmento que trazaste en el paso 2, y además, traza por C una perpendicular al segmento $\overline{BD}$.

Observa que, la figura $\square ABCD$ es un cuadrado.

- **Elabora** en tu cuaderno un diseño para un mural, con base en cuadrados. Utiliza regla y transportador

Artistas como Maurits Cornelis Escher, utilizaron patrones geométricos para sus creaciones.

Imagen: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/escher.htm

Obra de Bridget Riley, en la que se utilizan segmentos paralelos y no paralelos.

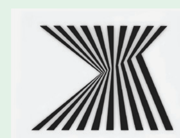


Imagen: https://www.artlex.com/es/movimientos-artisticos/op-art/

Ten en cuenta que la desigualdad triangular (también llamada desigualdad de Minkowski) se cumple cuando: a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo, entonces se verifica que:

$a + b > c$; $a + c > b$, *o* bien, $b + c > a$.

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de conocimientos de numeración y geometría, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

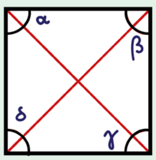
Cuadriláteros

Cuadrilátero: son polígonos con cuatro lados.

¿Cuáles cuadriláteros conoces?

1. Como viste en la lección anterior, si A, B, C y D son los vértices de un cuadrilátero, este puede representarse con el símbolo: $\square ABCD$.

2. Independientemente del tipo, siempre tienen 2 diagonales y cuatro ángulos interiores (o internos).



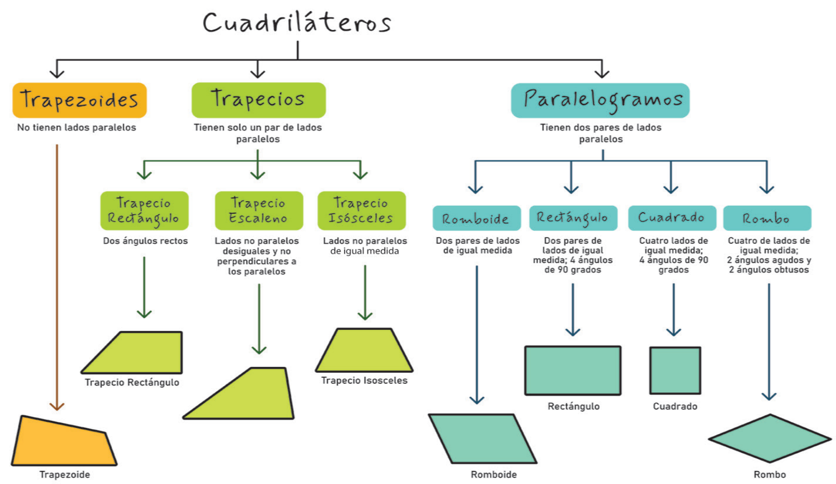
Aquí destacamos las diagonales en color rojo.

Denotamos los ángulos con las primeras letras del alfabeto griego: alfa, beta, gamma y delta.

3. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

Clasifica los cuadriláteros

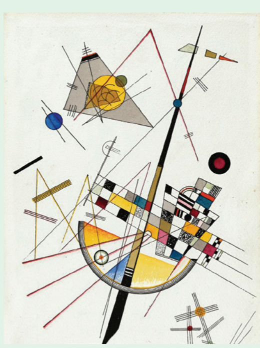
Los cuadriláteros pueden clasificarse atendiendo a la noción de paralelismo, es decir, comparando sus lados opuestos. Así, se generan tres grandes grupos o familias, las cuales te mostramos en el diagrama siguiente.



Observa, que la familia de los *trapezoides* incluye a aquellos *cuadriláteros* que no tienen lados paralelos. La familia de los *trapecios* abarca todos aquellos que tienen solo un par de lados paralelos. Y la de los paralelogramos incluye a los que tienen dos pares de lados paralelos.

Además, dentro de cada familia se dan subclasificaciones, atendiendo a la comparación de la medida de sus lados o de sus ángulos. Por ejemplo: en los *rombos*, todos sus lados tienen la misma medida, sin embargo, dos de sus ángulos son agudos y los otros dos son obtusos.

Nota que obras de arte como la de Kandinsky se basan en figuras geométricas.

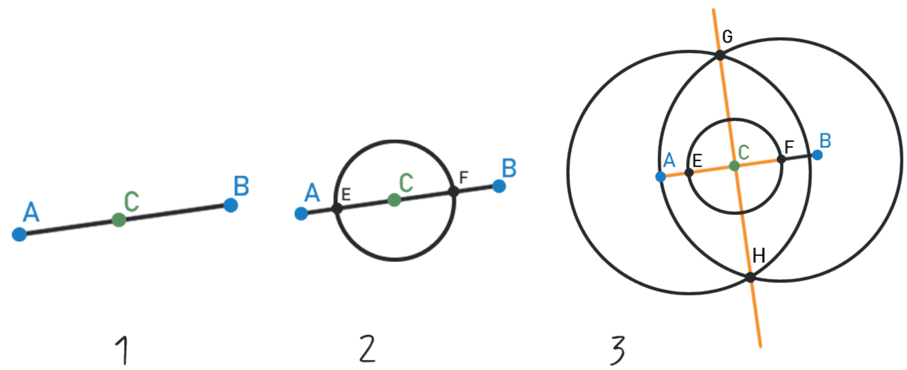


Fuente: museothyssen.org

Traza un segmento perpendicular a uno dado

Una de las construcciones básicas, con regla y compás, es: dado un segmento construir un segmento perpendicular a este. Ello, como advertirás, puedes hacerlo con apoyo en el transportador, pero aquí solo utilizarás los instrumentos señalados al principio.

¿Cómo puedes proceder?

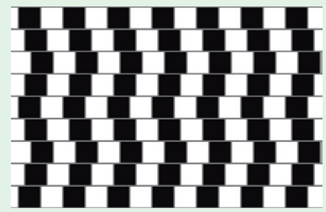


- Traza un segmento $\overline{AB}$. Representa en este un punto C.

- Con el compás, y haciendo centro en C, traza un arco de circunferencia que corte al segmento AB. Etiqueta estos puntos de corte con las letras E y F.

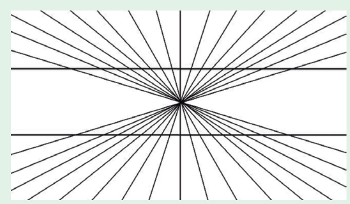
- Haz centro en E, con abertura $\overline{AF}$ y traza la circunferencia. Repite este paso, pero haciendo centro en F. Estas dos circunferencias se cortan en G y en H. Observa que, la recta $\overleftrightarrow{GH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Esto se indica con: $\overleftrightarrow{GH} \perp AB$.

Las nociones de paralelismo y de perpendicularidad de segmentos y rectas ha inspirado al arte en general.
En la obra que sigue, suelen percibirse los segmentos como no paralelos entre sí, sin embargo, lo son.



Fuente: Matematicascercanas

Algo similar sucede si observas la composición que sigue:



Fuente: La voz Galicia

El símbolo $\perp$ se lee: "es perpendicular a".

- **Investiga** sobre varios tipos de chichiguas. Identifica y clasifica los cuadriláteros presentes en su esqueleto.
- **Traza** en tu cuaderno, una perpendicular a un segmento dado, utilizando regla y transportador. Explica a tus compañeros los pasos que seguiste para lograrlo.

- Aplica el razonamiento lógico, para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana en las que se utilicen los conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros.

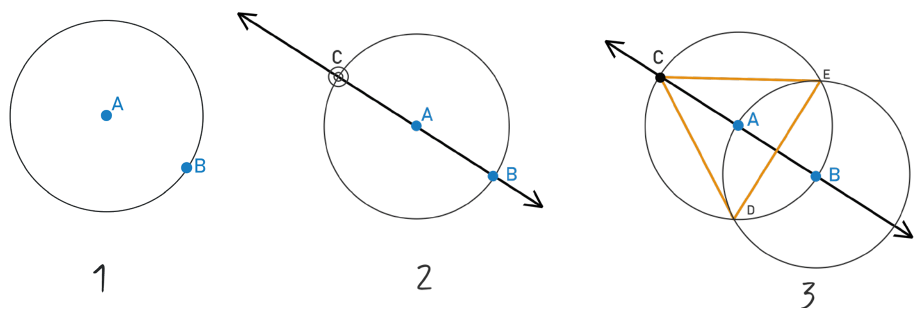
Polígonos inscritos y circunscritos

¿Qué significa inscribir y circunscribir?

La idea general a que aluden estos términos (vale decir, envolver una figura, o su proceso contrario), también se aplica en la geometría. De hecho, inscribir o circunscribir un polígono en una circunferencia, abarca un abanico de problemas muy interesantes.

Inscribe un triángulo equilátero en una circunferencia

Este es un problema elemental e importante.



Una forma de hacerlo (no es la única), se describe a continuación.

1. Selecciona un punto cualquiera, llámalo A. Con el compás, traza una circunferencia de centro A y radio arbitrario. Sobre la circunferencia, escoge cualquier punto y etiquétalo con la letra B.

2. Traza la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Etiqueta con C el punto de intersección de la recta con la circunferencia.

3. Con el compás, haz centro en B con radio AB, y traza un arco de circunferencia, que corte la circunferencia. Llama a tales puntos de intersección E y D.

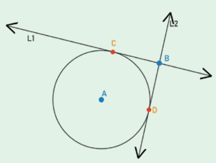
Solo falta que traces los segmentos $\overline{CE}$, $\overline{ED}$ y $\overline{DC}$.

Observa que, el ΔCDE es equilátero y está inscrito en la circunferencia.

Aa

Polígono inscrito en una circunferencia: es aquel en el que todos sus vértices son también puntos de la circunferencia, además, todos sus lados están dentro del círculo que ella define.
Polígono circunscrito en una circunferencia: es aquel en el que todos sus vértices son puntos exteriores al círculo que esta define, además, sus lados son tangentes a la circunferencia.

Ten en cuenta que una recta es tangente a una circunferencia, si se intersecan en un único punto. Suele decirse que se "tocan en un solo punto".



Observa que, en la figura anterior, la recta $L1$ es tangente a la circunferencia, ya que la toca solo en un punto (que etiquetamos con C). Algo similar sucede con la recta L2.

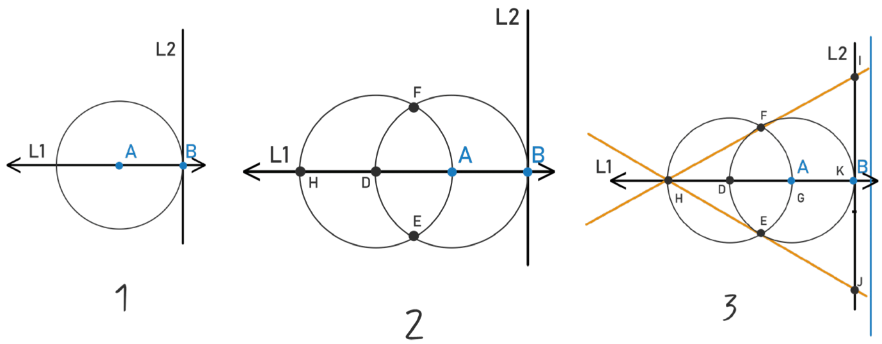
La piedra del Sol contiene circunferencias concéntricas (es decir, comparten el mismo centro).

Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piedra_del_sol.gif

Circunscribe un triángulo equilátero

Un problema inverso al de *inscribir* es el de *circunscribir* un polígono a una circunferencia. Aquí lo harás en el caso del triángulo equilátero.

Etapa 1. Traza una circunferencia de centro A y radio AB (de cualquier medida). Observa la figura al margen.



Etapa 2. Traza una perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por *B* (tal como aprendiste en la lección anterior), llámala L2. Después, utilizar el compás para trazar una circunferencia con centro en *D* y radio *AB*. Marca el punto de corte *H* de esa circunferencia, con la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

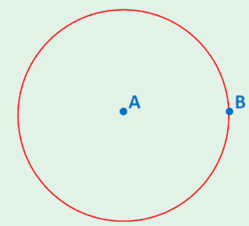
Marca también los puntos de intersección de esa circunferencia con la primera, y llámalos *E* y *F*.

Etapa 3: Finalmente, traza las rectas $\overleftrightarrow{HF}$ y $\overleftrightarrow{HE}$. Marca los puntos de intersección de estas rectas con L2. Llama a estos puntos I y J.

Observa que, la reunión de los segmentos $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$ y $\overline{JH}$ conforman un triángulo. Entonces:

ΔHIJ es equilátero y está circunscrito a la circunferencia de centro A.

- **Emplea Geogebra** para circunscribir un triángulo a una circunferencia, y organiza una exposición de tu construcción y las de los demás.



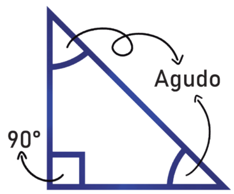
Éste es el gráfico que corresponde a la Etapa 1.

Pirámeide, un ejemplo de triángulo equilatero. Foto: Pexels

- Emplea, con precisión, herramientas tecnológicas, para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros.

El Teorema de Pitágoras

Un ángulo de 90º suele denotarse con un cuadrado.

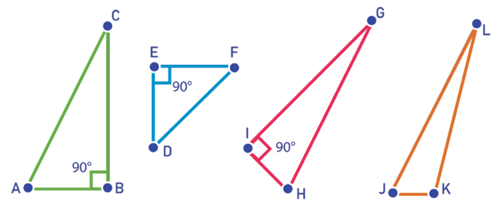


El arco de circunferencia se reserva para denotar los ángulos agudos y obtusos.

¿Qué significa que un triángulo tenga un ángulo recto en uno de sus vértices?

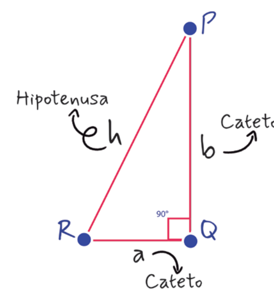
Distingue los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son aquéllos que tienen un ángulo de 90º (llamado ángulo recto), tienen especial importancia en las matemáticas e innumerables aplicaciones en la vida cotidiana.



Observa que los triángulos ΔABC, ΔEFD y ΔGHI son rectángulos, pues tienen un ángulo que mide 90o. En cambio, ΔLKJ no es un triángulo rectángulo, pues tiene dos ángulos agudos y un ángulo obtuso.

En un triángulo rectángulo, sus lados reciben denominaciones particulares: el lado de mayor longitud, justo el lado opuesto al ángulo recto, se denomina *hipotenusa*, y se acostumbra etiquetarlo con la letra *h*. Y los otros lados se denominan *catetos*.



Como advertirás, su *perímetro* y su *área* se calculan de la misma forma que en cualquier otro triángulo:

$$p\Delta PQR = a + b + h$$

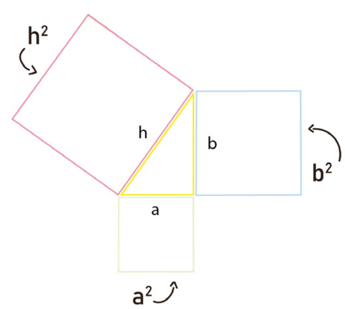
$$A\Delta PQR = \frac{\overline{RQ}\cdot\overline{PQ}}{2}.$$

Los triángulos rectángulos han inspirado muchas obras artísticas. Una de ellas es "Generación fractal n. 31", del pintor holandés Herman van de Poll.

Fuente: Cuaderno de cultura cientifica

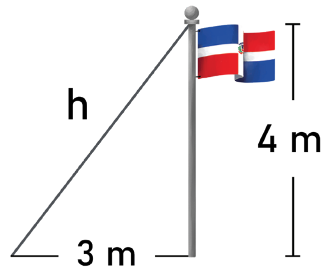
Aplica el Teorema de Pitágoras

El *Teorema de Pitágoras* es una propiedad, que relaciona las medidas de los catetos con la medida de la *hipotenusa*, de la siguiente manera: Si *h* es la medida de la hipotenusa y *a* y *b* son las medidas de los catetos, entonces: $h^2 = a^2 + b^2$



Lo cual puede interpretarse geométricamente de la siguiente forma: el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados, construidos sobre los catetos.

Observa el ejemplo que sigue: para la instalación de un mástil de 4 m de alto, se ha indicado que uno de sus apoyos será un alambre, que irá desde su extremo superior hasta un punto ubicado a 3 m de la base.



¿Cuál debe ser la medida del alambre en tensión?

Solución: este problema podemos modelarlo a través de un triángulo rectángulo, en donde:

h es la medida de la hipotenusa y los catetos miden 4 m y 3 m, respectivamente. Es decir, puedes escribir que:

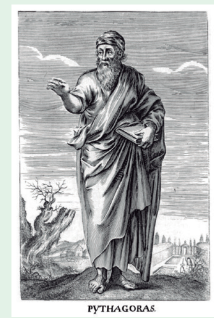
$$h^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\text{Por tanto: } h^2 = 16 + 9 = 25$$

Para continuar, te puedes apoyar en tus conocimientos sobre la potenciación y la radicación: necesitas saber cuál es el número natural cuyo cuadrado es igual a 25 y esto equivale a calcular: $\sqrt{25} = 5$.

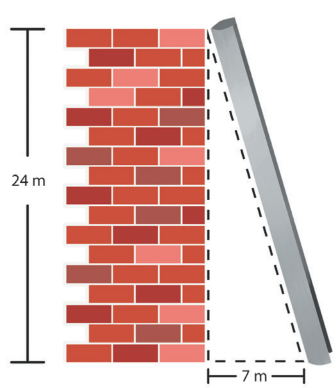
Entonces, $h = 5$. Por tanto, el alambre en tensión medirá 5 m.

Imagen: https://personajeshistoricos.com/c-filosofos/pitagoras/



El *Teorema de Pitágoras,* aun cuando lo conocemos con ese nombre, en honor al matemático y filósofo griego Pitágoras (quien la divulgó y estudió a profundidad), era ya conocido en la antigua Babilonia, aprox. 1900 años a.C.

- Necesitas **instalar** un tubo de desagüe desde lo alto de un muro de 24 m hasta el piso, a 7 m de la base de este muro. ¿Cuál debe ser la longitud del tubo de desagüe?



- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración y geometría, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Actividad grupal

Construyendo una rampa y representando una obra de arte

Este tipo de problemas se relaciona con la necesaria adaptación de nuestras construcciones arquitectónicas a las personas con movilidad reducida. Y, por otra parte, a numerosas aplicaciones en la vida diaria, en la ciencia y en la tecnología.

¿Qué haremos?

Resolver un problema, donde se aplique el Teorema de Pitágoras y se utilicen los números primos, para representar una obra de arte.

¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra y la reproducción de una pintura, de un artista de República Dominicana.

¿Cómo nos organizamos?

Formar parejas, ambos tendrán igual responsabilidad en la ejecución de las actividades.

¿Cómo lo haremos?

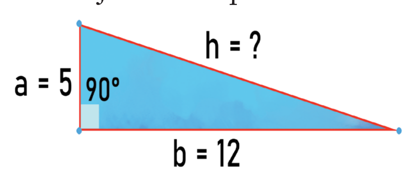
Desarrollarán dos actividades:

1. Resolver un problema, relacionado con la construcción de una rampa de acceso.

2. Utilizar un número primo de muchos dígitos, para representar una obra de arte.

Actividad 1. Resuelvan el siguiente problema

Para facilitar el acceso a una locación, deben construir una rampa, en sustitución de la escalinata que allí se encontraba. Observen que la rampa a construir se ha destacado en color rojo. La rampa estará elevada 5 m, pero, además, debe extenderse 12 m, midiendo desde la proyección del otro punto de apoyo hasta el piso.



Como advertirán, pueden identificar un triángulo rectángulo que sirve de modelo al problema dado (observen con atención la figura ubicada a la derecha de esta página).

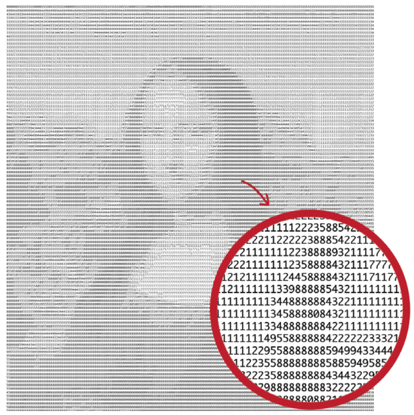
Argumenta y responde

a. ¿Cuál debe ser la medida de la rampa? Analiza detenidamente el problema y expresa tus resultados y métodos a tu compañero/a y escucha los suyos. A través de una discusión razonada, lleguen a una solución en conjunto. Ante las dudas, pidan orientación a su maestro. Compartan los resultados con los demás equipos.

b. ¿Qué dificultades enfrentaste al realizar los cálculos? ¿De qué manera consideras que se pueden solventar?

Actividad 2. Los números primos en el arte

El físico *Espósito-Farese* utilizó un número primo de 30,000 dígitos para representar el famoso cuadro de *Leonardo da Vinci: La Gioconda* (o Monna Lisa).



Aquí te mostramos un detalle de la obra. Sin duda alguna, un recurso muy creativo que estrecha lazos entre el maravilloso mundo de los números y el del arte.

c. Busca la reproducción de una pintura de algún artista de República Dominicana que te atraiga.

d. Investiga en Internet un número primo, de muchos dígitos.

e. Utiliza tu creatividad para representar la obra que seleccionaste, con ese número primo.

Presentación y socialización de las actividades

a. Concluida la actividad, un miembro de cada equipo presentará sus respuestas sobre las actividades: a, b, c, d y e.

b. Organiza, junto a tus compañeros, una exposición con las representaciones que elaboraron en el apartado e, de la segunda actividad.

Coevaluación

Realiza observaciones a las soluciones planteadas por los otros equipos, así como a sus representaciones artísticas.

Autoevaluación

Cada miembro del equipo responde a lo siguiente:

¿Qué aprendiste de esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

El Teorema de Pitágoras ha inspirado también el arte escultórico, tal es el caso de la obra: Fractal árbol de Pitágoras, de H. Skerbisch.

Fuente: https://culturacientifica.com/2019/02/06/el-teorema-de-pitagoras-en-el-arte/

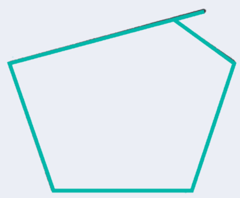
Medición de una pantalla de computadora: alto, ancho y diagonal. Fuente: Pexels.

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración y geometría, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

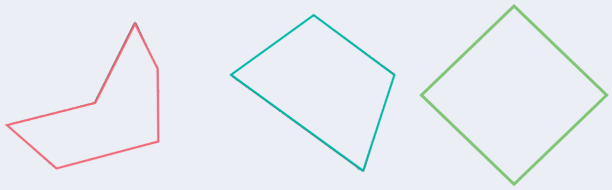
Evaluación

- Considera tres segmentos, uno con medida 5 cm, otro de 2 cm y un tercero de 7 cm ¿Puede construirse un triángulo con ellos?

- ¿Es o no la siguiente figura un polígono? ¿Por qué?



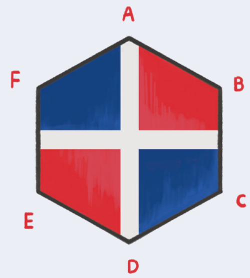
- Identifica los elementos (lados, vértices, ángulos interiores y diagonales), en cada caso.



- ¿Cuántas diagonales tiene el decágono regular? ¿Cuántos ángulos interiores posee?

- ¿Cuál es el menor número de lados que puede tener un polígono?

- Considera el polígono y su interior que sigue (similar a una chichigua) ¿Cuántas diagonales tiene? ¿Cuántos ángulos internos? ¿Cuántos ángulos externos?



- Haz una lista de los elementos de tu entorno, que tengan forma de cuadriláteros. Clasifícalos. Puedes elaborar una tabla como la siguiente:

Elemento del entorno con forma de cuadrilátero	Tipo de cuadrilátero

- ¿Existen pentágonos cóncavos? ¿O todos los pentágonos son convexos?

- En un polígono, ¿puede darse el caso de que uno de sus ángulos interiores mida 180^0? Argumenta tu respuesta y compártela con tus compañeros.

- ¿Existen polígonos convexos de seis lados?

- Representa una circunferencia y un punto A, fuera de ella (y fuera del círculo que esta define). ¿Cuántas rectas que pasan por A son tangentes a la circunferencia? Comparte tus razonamientos con tus compañeros.

- La relación d= $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, ¿se verifica para otros polígonos convexos? ¿O sólo es válida para los pentágonos?

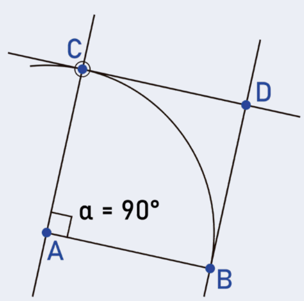
- Construye polígonos irregulares con apoyo en GeoGebra: https://www.geogebra.org/geometry.

- Idea un método para construir un pentágono regular, en Geogebra. Conversa sobre tu idea con tus compañeros.

- Construye un pentágono utilizando regla y compás.

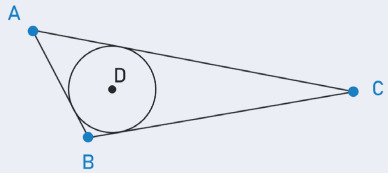
- Construye un pentágono utilizando regla y transportador.

- Construye un cuadrado, con apoyo en **Geogebra**. Deduce los pasos para su construcción a partir de la siguiente figura.

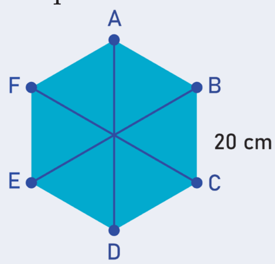


- Conforma equipos de tres integrantes y elabora tarjetas con los nombres de cada cuadrilátero. En cada tarjeta debe estar escrito un único nombre, pero no su representación gráfica. Éstas se guardan en una bolsa. Uno de los integrantes del equipo saca una tarjeta al azar y los otros dos deben construir una representación de ese cuadrilátero. Se anota 1 punto si lo hizo correctamente y 0, si no. Luego se rotan en la tarea de sacar la tarjeta. Gana quien acumule más puntos.

- En un trabajo de diseño se debe circunscribir un triángulo escaleno a una circunferencia dada (observa la figura adjunta) ¿Cómo puedes hacerlo con regla y compás? Conversa con tus compañeros sobre tu método.

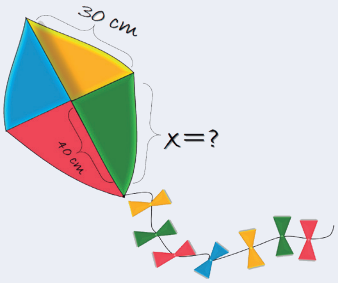


- Para elaborar una *chichigua* se te da como única información la que está en la figura adjunta ¿Cuánto mide cada una de las varillas del esqueleto?



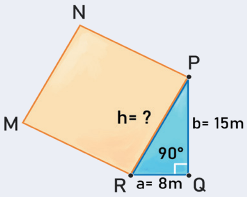
- En la *chichigua* que sigue cada lado de los dos triángulos superiores miden 30 *cm*.

¿Cuál es la medida del lado x?

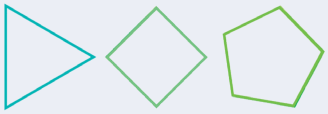


- Un terreno cuadrado comparte uno de sus lados con un terreno triangular de vértices R, P y Q. Se sabe que la medida de RQ es 8 m y la de PQ es 15 m. Además, este triángulo es rectángulo (Observa la figura adjunta).

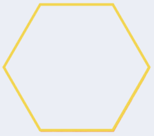
Con esta información, ¿Es posible conocer la medida del lado h? Si es así, ¿Cuál es ese valor? De no ser posible, explica por qué.



- ¿Cuántas *diagonales* tiene cada uno de los polígonos que siguen?



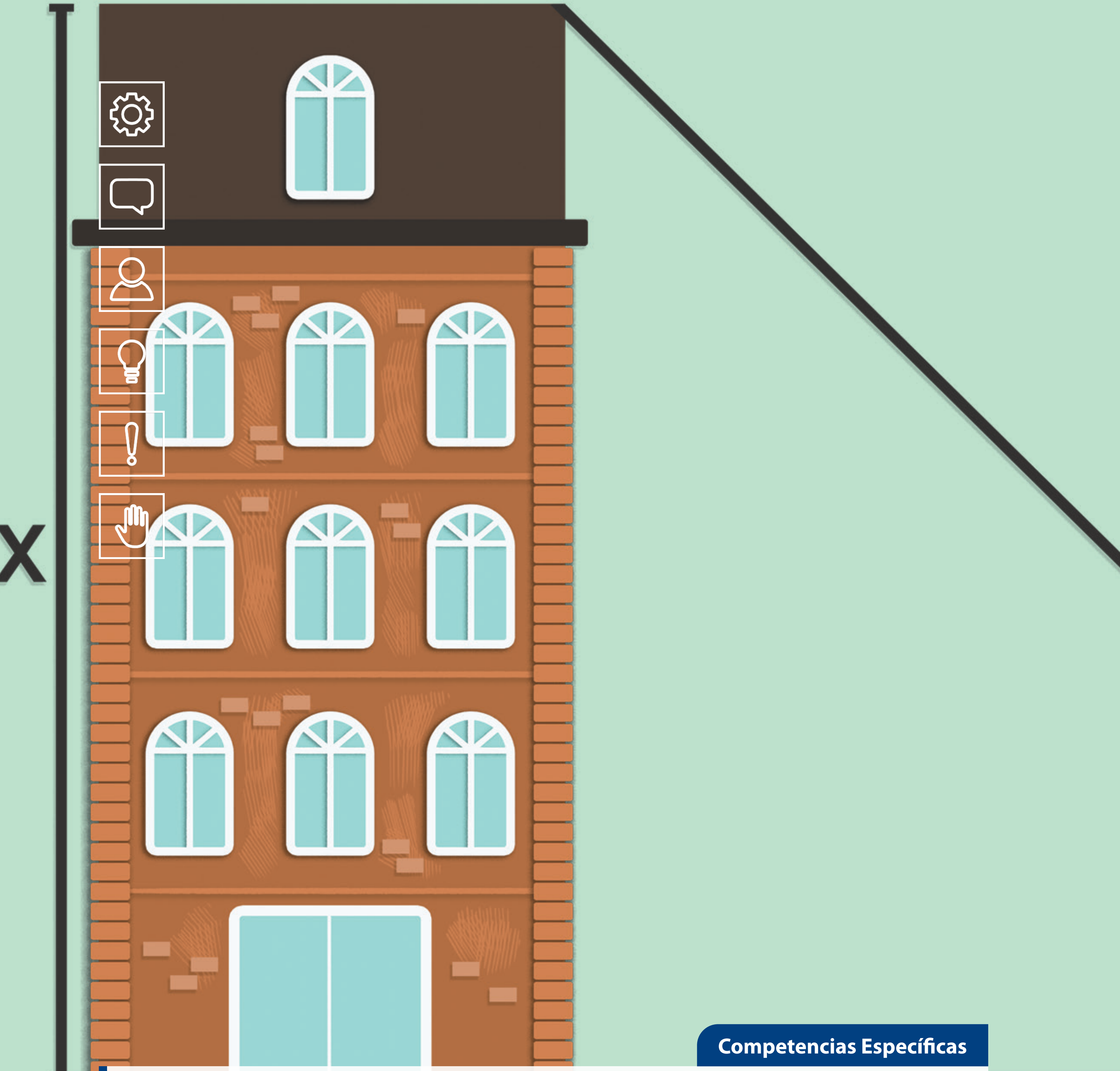
- ¿Cuántas diagonales tiene el polígono que se muestra?



- Sin hacer la gráfica, deduce cuántas diagonales tendrán los polígonos regulares de 7 y 8 lados.

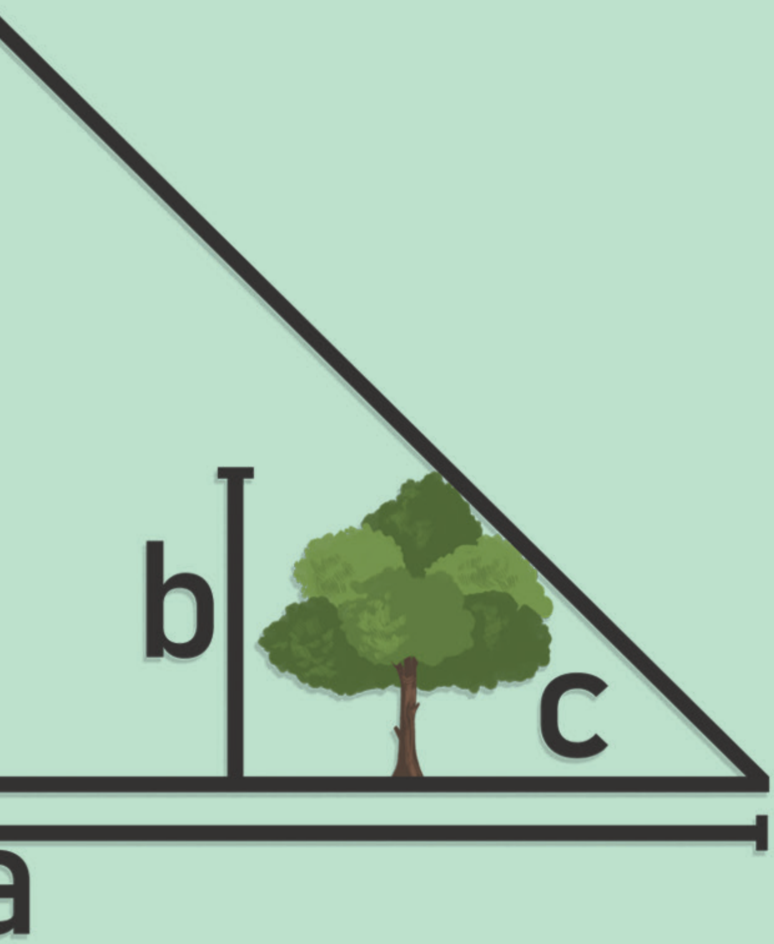
- Se requiere ubicar un poste justo en el centro de un círculo que sirve de decoración en el piso.

¿Cómo puedes ubicar el centro del círculo utilizando regla y compás? Conversa sobre tu método y solución con tu docente y compañeros.



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 5

Semejanza, congruencia y sus problemas

Situación de aprendizaje

En cierto momento del día, los rayos del sol proyectan la sombra de un edificio sobre el suelo, a cierta distancia de este. Algo similar sucede con la sombra que proyecta el árbol. Si se conoce la altura del árbol, ¿es posible, con estos datos, calcular la altura del edificio?

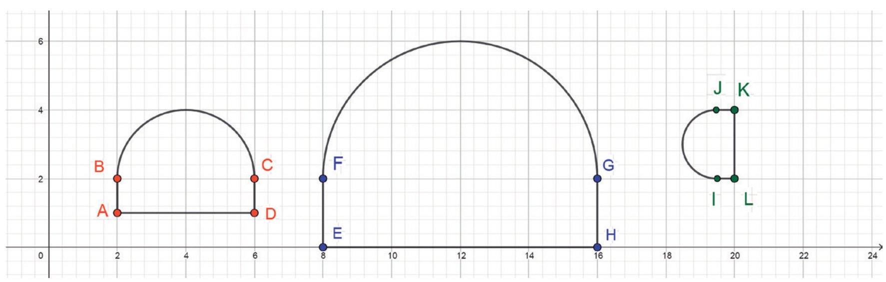
Contenido

Semejanza

¿Cuál es el concepto de razón?

Reflexiona sobre la idea de semejanza

La idea de "forma", en matemáticas, hace referencia a las características geométricas de una figura o cuerpo. Por ejemplo, ¿tiene que ver con describir si es plana o no?, ¿cómo está delimitado su contorno?, ¿cuál es la relación entre las medidas de sus lados, ángulos o caras?, ¿es de una sola pieza?, entre otras interrogantes.



Las tres figuras mostradas en el ejemplo tienen la misma forma , aunque, como puedes observar, no tienen el mismo tamaño y posición. Es decir, todas ellas son **semejantes** entre sí.

Si llamamos a estas imágenes (de izquierda a derecha): F1, F2 y F3, entonces, podemos escribir que:

$$F1 \sim F2,\ F2 \sim F3 \text{ y } F1 \sim F3$$

(F1 es semejante a F2, F2 es semejante a F1 y F1 es semejante a F3).

Existe una condición que se verifica entre dos figuras semejantes: la distancia entre dos puntos cualesquiera P y Q de una de ellas, dividida entre la distancia de sus "puntos correspondientes" en la otra, P' y Q', es constante. En símbolos:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = c$$

Tal constante se llama **razón de semejanza**.

Observa que, al punto **A**, de la figura **F1**, le corresponde el punto **E**, de la figura **F2** y también el punto **L**, de la figura **F3**.

Aa

Figuras **semejantes**: dos o más figuras son semejantes si tienen la misma forma, con independencia de su tamaño y posición. Esta relación se simboliza con el signo ~ (que se lee: "es semejante a"). Es, también, un concepto de uso muy común en otras ciencias y en la vida cotidiana.

Imagen: http://www.rupestreweb.info/panorama.html

Con base en el concepto de semejanza, pueden estudiarse algunos de los petroglifos de las culturas pre-hispánicas, en la República Dominicana.

Muchas construcciones arquitectónicas, de República Dominicana, contienen representaciones semejantes. Un ejemplo de ello es la edificación del Museo Memorial de la Resistencia Dominicana.

Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Museo_Memorial_de_la_Resistencia_Dominicana#/media/Archivo:Museo_00-b.jpg

Ejemplo: Considera las figuras F1 y F2, antes dadas. En ellas, sabemos que: AB = 1, AD = 4, BC = 4, arco $CB = \frac{1}{2}\pi \cdot BC = \frac{1}{2}\pi\,(4) = 2\pi$, etc. Además, EF = 2, EH = 8, FG = 8, arco $GF = \frac{1}{2}\pi \cdot FG = \frac{1}{2}\pi\,(8) = 4\pi$, etc.

Como F1 ~ F2, entonces, todas las razones entre "puntos correspondientes" serán iguales. En la tabla que sigue se muestran tres cálculos:

Puntos de la Figura 1	**Puntos correspondientes en F2**	**Razón**
A y B	E y F	$\frac{AB}{EF} = \frac{1}{2}$
A y D	E y H	$\frac{AD}{EH} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
C y D	G y H	$\frac{CD}{GH} = \frac{1}{2}$

Observa que, si dividimos la medida del arco CB entre la medida del arco GF, se tiene que $\frac{arco\ CB}{arco\ GF} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Es decir, obtenemos nuevamente la razón de semejanza, entre ambas figuras.

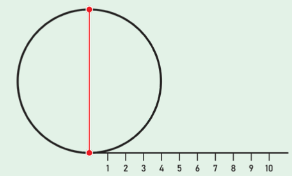
Entonces, puede decirse que F1 y F2 están en razón $\frac{1}{2}$.

La razón de semejanza es un número que indica, qué tanto se reduce o se amplía una imagen para obtener la otra.

Como advertirás, toda figura es semejante a sí misma.

- Continuando con el ejemplo dado sobre las figuras F1, F2 y F3. **Responde** lo siguiente:
  - ¿Cuál es la razón, entre las figuras F1 y F3?
  - ¿Cuál es la razón, entre las figuras F2 y F3?
  - **Aporta** ejemplos de imágenes semejantes, que observes en tu entorno.
  - ¿Qué significa, que dos fotografías tengan una razón de semejanza igual a 3?

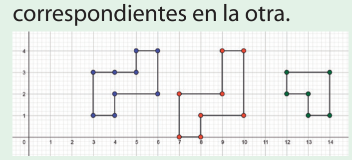
Recuerda que, para calcular la medida de la circunferencia, basta con conocer la medida del diámetro. La relación está dada por:
Cicunferencia = πDiámetro



En el caso de las figuras *F1* y *F2*, debes calcular la mitad de la medida de la circunferencia, por tanto: arco $CB = \frac{1}{2}\pi BC = \frac{1}{2}\pi 4 = \frac{1}{2} 4\pi = 2\pi$.

Además: arco $GF = \frac{1}{2}\pi FG = 4\pi$.

Las imágenes que siguen, que llamaremos *G* y *H*, no son semejantes. En estas, existen puntos, que no tienen sus correspondientes en la otra.



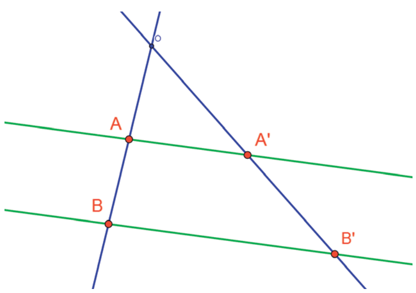
En este caso se escribe $G \nsim H$ (esto se lee "*G* no es semejante a *H*").

- Comunica, de manera coherente, ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones y geometría con números decimales y enteros.

Aa

Teorema de Tales: si dos rectas L1 y L2, secantes, son cortadas por rectas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$, entonces, los segmentos que determinan sobre una de las secantes son proporcionales a los segmentos que se determinan en la otra secante.

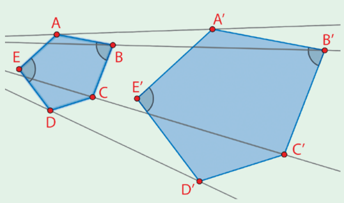
Es decir: $\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$



Tambien se cumple que:

$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ y $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

La definición de semejanza entre triángulos es válida, igualmente, para otros polígonos.
A continuación se muestra un ejemplo de esto.



Observa que, una figura es una especie de "proyección" de la otra, en la que se conservan los ángulos y la razón de sus lados. Este método se conoce como **homotecia.**

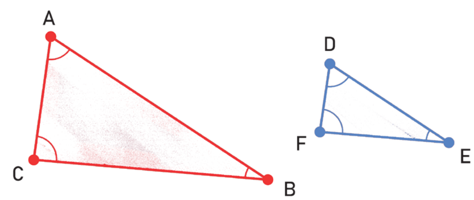
La semejanza de triángulos

¿Cuál es el concepto de proporcionalidad entre dos segmentos?

Estudia la definición de semejanza entre triángulos

En el caso de los triángulos, y de los polígonos en general, es posible dar una definición especial de semejanza: basta con que los ángulos correspondientes tengan la misma medida y que, los lados correspondientes sean proporcionales.

Los puntos, lados y ángulos, que son correspondientes, también suelen llamarse **homólogos.**

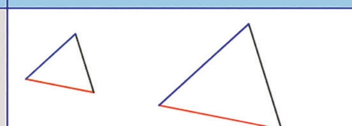
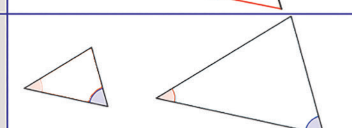
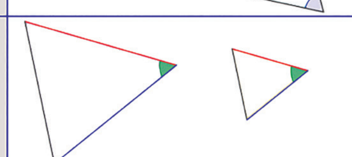


En el caso de las figuras mostradas, se cumple que:
$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ y $\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$

lo que significa que tienen igual medida, además, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

Por tanto, ΔABC~ΔDEF.

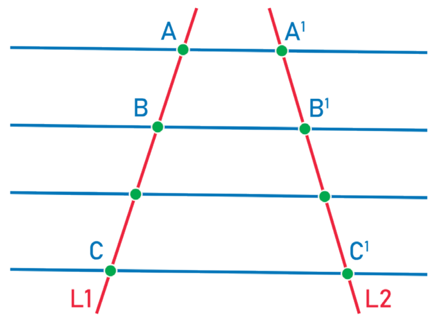
Sin embargo, para concluir que dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar todos los hechos citados antes, es suficiente con comprobar que se cumple al menos uno de los **criterios** que siguen, llamados **criterios de semejanza** entre triángulos.

Criterio	Descripción	Ejemplo
1	Cuando los tres lados de un triángulo son proporcionales con sus correspondientes, en el otro triángulo.	
2	Cuando dos de los ángulos del primer triángulo tiene la misma medida que dos de los ángulos, del segundo triángulo.	
3	Cuando un ángulo del primer triángulo tiene la misma medida que un ángulo, del segundo triángulo y, además, los lados que lo forman son proporcionales.	

Observa una aplicación del Teorema de Tales

Observa la imagen adjunta. En ella se muestra una escalera, característica en algunos parques infantiles. Las columnas de la misma se pueden asociar con rectas no paralelas; mientras que los peldaños, con rectas o segmentos de rectas paralelas.

Con estas ideas podemos construir un modelo geométrico:



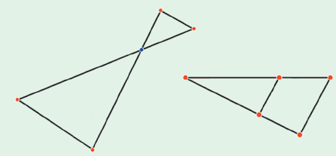
Es decir, las rectas L1 y L2 son cortadas por las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$, etcétera.

Por ejemplo, supongamos que la distancia entre A y B es de 30 cm, que la distancia entre B y C es de 40 cm y la distancia entre A y C es de 60 cm (y que las distancias entre sus puntos correspondientes es la misma).

Con estas condiciones se cumple que: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{30\ cm}{30\ cm} = 1$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{40\ cm}{40\ cm} = 1$, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{60\ cm}{60\ cm} = 1$, etc. Es decir, los segmentos que se determinan sobre L1 son proporcionales a los segmentos que se determinan en L2.

Esta propiedad se conoce como **Teorema de Tales**.

Si dos triángulos se encuentran en alguna de las posiciones que siguen:



Se dice que están en **posición de Tales.**
Si dos triángulos están en **posición de Tales**, entonces, son semejantes.

Algunas pictografías y petroglifos, de República Dominicana, contienen triángulos semejantes. Tal es el caso de la máscara que mostramos a continuación, la misma se encuentra ubicada en El Hoyo de Sanabe.

Imagen: http://www.rupestreweb.info/panorama.html

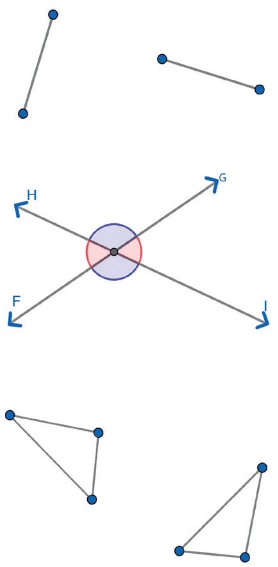
- Un triángulo tiene lados que miden 8 *cm*, 6 *cm* y 10 *cm*. Otro triángulo tiene lados que miden 4 *cm*, 3 *cm* y 5 *cm*. ¿Son semejantes? ¿Por qué?

- Aplica el razonamiento lógico, para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana, en las que se utilicen los conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros.

Congruencia

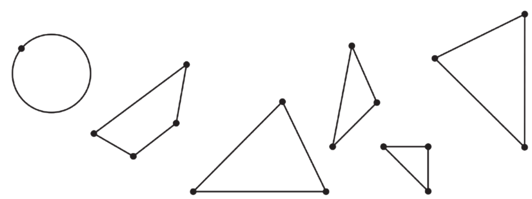
¿Qué denominación recibe una propiedad que no se altera o cambia, al aplicarle una transformación?

Congruencia: dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, independientemente de su posición. El signo para indicar la congruencia entre ellas es ≅. En el ejemplo que sigue, se muestran dos segmentos congruentes, los ángulos congruentes que se generan al cortarse dos rectas, y dos triángulos congruentes.



Observa las figuras con la misma forma y tamaño

Dos de las figuras, que se muestran a continuación, tienen la misma forma y el mismo tamaño: precisamente la tercera y la sexta, de izquierda a derecha; aun cuando no están en la misma posición.



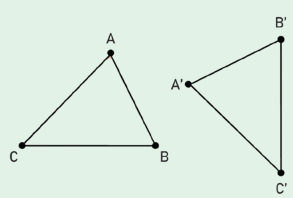
Es decir, si giramos y trasladamos, adecuadamente, la sexta imagen, podemos hacerla coincidir exactamente con la tercera. su forma y tamaño no cambian, al realizar el giro y la traslación.

Si dos figuras, F y G son congruentes, entonces podemos escribir:

$$F \cong G$$

Lo cual se lee "F es congruente con G". Y esta es la idea de **congruencia.** Ahora bien, si dos figuras, H e I, no son congruentes, se escribe que HI.

Observa que los triángulos ∇ABC y $\nabla A'B'C'$ son congruentes: $\nabla ABC \cong \nabla A'B'C'$.



Tienen la misma forma y tamaño, independientemente de su posición.

Ejemplos de congruencia	En símbolos	En símbolos
Dos segmentos son congruentes si:	Tienen la misma medida.	Si $AB = CD$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
Dos ángulos son congruentes si:	Tienen la misma medida.	Si $m\measuredangle\alpha = m\measuredangle\beta$, entonces $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\beta$
Dos triángulos son congruentes si:	Sus lados correspondientes son congruentes, y sus ángulos correspondientes también son congruentes.	$AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $CA = C'A'$. Además $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$ y $\measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C'A'$ Entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Reflexiona sobre una aplicación de la congruencia de triángulos

Ejemplo: para un jardín se planeó un diseño como el del dibujo adjunto. El interior de cada triángulo contendría plantas florales de dos tipos. Ya con el suelo preparado, se clavaron tres estacas: A, B y C, y se ataron cuerdas entre ellas.

Ahora bien, ¿dónde clavar las estacas C, D y E?, de manera que:

(1) los puntos A, C y E queden alineados; y también los puntos B, C y D.

(2) Además, la cuerda que va de A a C debe medir lo mismo que la que va de C a E. Algo similar debe suceder con las cuerdas que van de B a C y de C a D.

Esto puede escribirse, simbólicamente así:

(1) $E \in \overleftrightarrow{AC}$ y $D \in \overleftrightarrow{BC}$; y (2) $AC = CE$ y $BC = CD$

Una solución, entre tantas, es: trazar el rayo AC. Y, con ayuda de un compás (que en la práctica puede ser un trozo de cuerda), hacer centro en C, con abertura AC y marcar el punto E, sobre el rayo. Con esto, AC=CE. Una idea similar se sigue para marcar el punto D.

Tras lo cual: ¿ΔABC ≅ ΔCDE?

Las figuras congruentes son muy comunes en nuestro contexto, por ejemplo: en el área de la construcción, en la manufactura y producción, en lo que se denomina ingeniería en reversa, en las ciencias de la salud, etc. A continuación, se encuentran dos ejemplos de teselados (con una pieza congruente y con dos piezas congruentes):

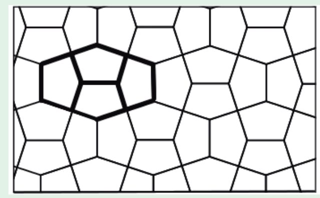
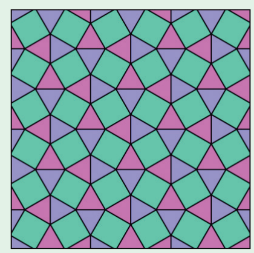
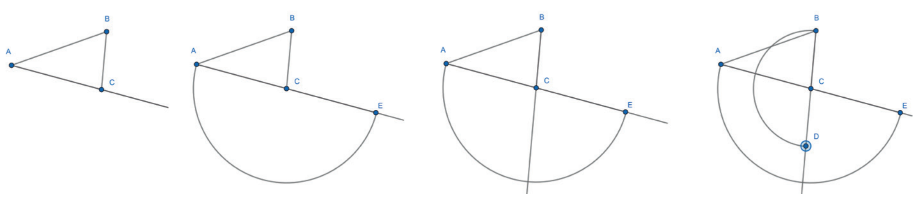


Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado#/media/Archivo:Tesela_cairo.png





- **Diseña** un embaldosado, con apoyo en regla y compás, cuyas piezas sean triángulos equiláteros y todos congruentes entre sí.
- **Conversa** sobre tu diseño y método, con tus compañeros y el docente.

- Comunica, de manera coherente, ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros.

Los criterios de congruencia entre triángulos

La **geometría** es una de las áreas, más antigua, de la **matemática.** La imagen que sigue corresponde al **Papiro de Ahmes** o **Papiro Rhind** (contiene problemas matemáticos de aprox. 1,900 años a.C.).

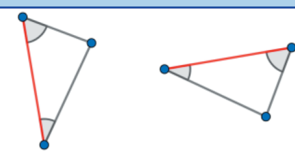
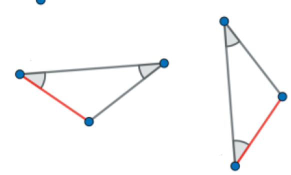
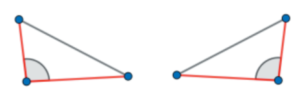
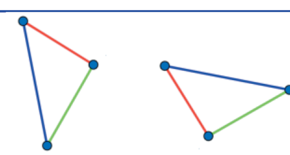
Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Ahmes#/media/Archivo:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg

¿Qué significa que dos figuras sean congruentes?

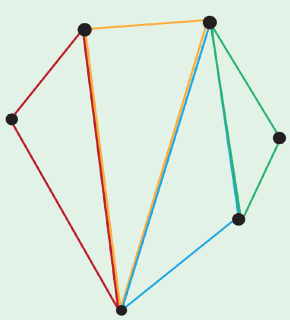
Reflexiona sobre los criterios de congruencia

En el caso de los triángulos, existen tres propiedades (llamadas criterios), que permiten concluir si estos son congruentes, observando solo un mínimo de condiciones, en vez de verificar que todos sus lados correspondientes son congruentes y que sus ángulos correspondientes son congruentes.

Es decir, estos **criterios** describen el mínimo de condiciones necesarias para concluir que, dos triángulos dados son congruentes.

Criterio	Dos ⊿ son congruentes si:	Ejemplo
	**ALA (Ángulo-Lado-Ángulo)**: si tienen dos ángulos congruentes con sus correspondientes, y el lado comprendido entre ellos, también es congruente con su correspondiente. **AAL (Ángulo-Ángulo-Lado)**: si tienen dos ángulos congruentes con sus correspondientes y un lado congruente con su correspondiente.	 
	**LAL (Lado-Ángulo-Lado)**: si tienen dos lados congruentes con sus correspondientes y el ángulo comprendido entre ellos, es congruente con su correspondiente.	
	**LLL (Lado-Lado-Lado)**: si tienen sus tres lados congruentes con sus correspondientes.	

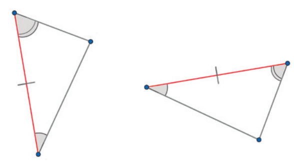
Aquí, puedes ver un ejemplo de un hexágono y su triangulación.



Y como todo polígono puede dividirse en triángulos, entonces estos criterios pueden dar información valiosa, para el caso de figuras más complejas.

¿Cómo denotar el caso de dos ángulos o lados congruentes?

Una convención universal es la que sigue: colocar una marca en la pareja de lados congruentes (ver el ejemplo adjunto). Además, en la pareja de ángulos congruentes se indicó con un arco; y la otra pareja de ángulos congruentes se indicó con dos arcos.

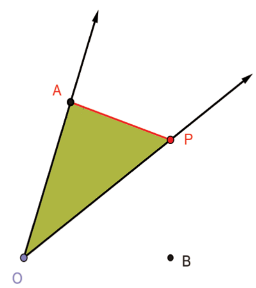


Esto facilita, enormemente, la interpretación y análisis de un problema.

Ejemplo: se comenzó el trazado de una *Pista para el lanzamiento de jabalina y martillo.* Observa la imagen siguiente.

Se ubicaron los puntos O, A y P.

Ahora, se desea ubicar un punto B, de manera que: $\overline{AP} \cong \overline{PB}$ y $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

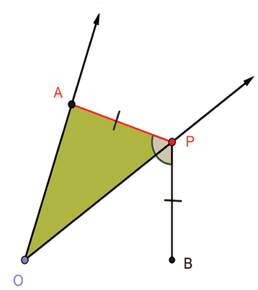


¿Cómo saber dónde ubicarlo?

Observa que necesitas trazar un triángulo ΔOBP. Y este triángulo compartirá un lado con el ΔOAP, precisamente el lado $\overline{OP}$.

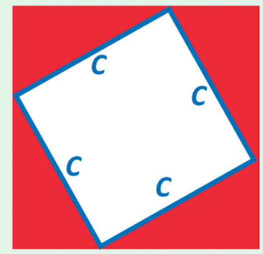
Así que, por el criterio LLL se tendrá que: $\Delta OBP \cong \Delta OAP$.

En particular, el $\measuredangle OPA \cong \measuredangle OPB$.



Por tanto, será suficiente con trazar el ángulo $\measuredangle OPB$ (con la misma medida que el $\measuredangle OPA$, luego, trazar un rayo $\overrightarrow{PB}$. Finalmente, trasladar la distancia AP sobre ese rayo. Observa, con atención, la última imagen.

El siguiente gráfico muestra una idea para demostrar el **Teorema de Pitágoras**. En ella, aparecen cuatro triángulos congruentes, construidos sobre los lados de un cuadrado.



Las construcciones concretas ofrecen muchas aplicaciones de las ideas de congruencia y de semejanza.

- **Halla** una solución distinta, para ubicar el punto *B* en la *Pista para el lanzamiento de jabalina y martillo.*

- Aplica el razonamiento lógico, para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana, en las que se utilicen los conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros.

Aa

Transformación geométrica: es una operación que permite hallar o construir una nueva figura, partiendo de una imagen inicial. A esta nueva figura geométrica se le denomina "homóloga", o también, "transformada".

Un ejemplo de reflexión es el siguiente: aquí el eje de simetría es precisamente la horizontal, que define uno de los lados del estanque de agua.

Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Reflexi%C3%B3n_de_la_luz#/media/Archivo:Taj_Mahal_(south_view,_2006).jpg

Todos estos tipos de transformaciones tienen ejemplos diversos en la naturaleza, en la ciencia, en la tecnología, en la vida cotidiana, etc.; incluso, en el espacio exterior.

Los parques eólicos proporcionan una idea de la transformación por rotación.

Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Energ%C3%ADa_e%C3%B3lica#/media/reenMountainWindFarm_Fluvanna_2004.jpg

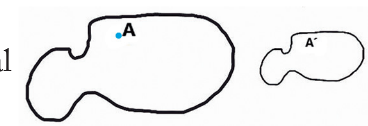
Transformaciones geométricas

¿Qué significado tiene transformar?

Sigue los ejemplos de transformaciones geométricas

Otra manera de estudiar las figuras, e incluso los cuerpos geométricos , es a través del concepto de transformación.

Es importante, tal como en la totalidad de las ideas matemáticas, la *notación* o el lenguaje simbólico. Si F es la imagen inicial y F´ es la nueva figura, obtenida a partir de la inicial, entonces: a cada punto A, que se encuentre en el dibujo de partida, le corresponde un punto A´ en la figura F´. Es decir, puedes escribir que:

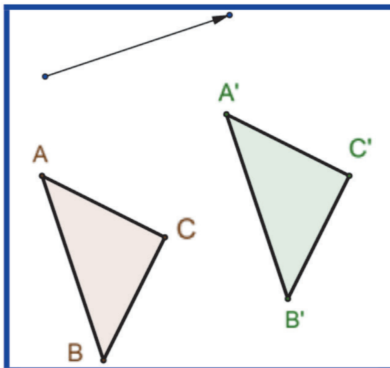
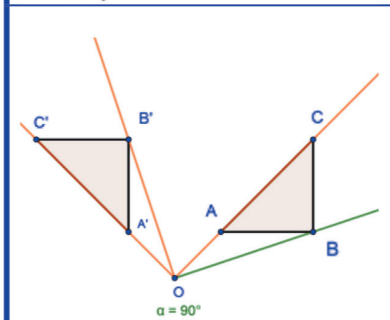
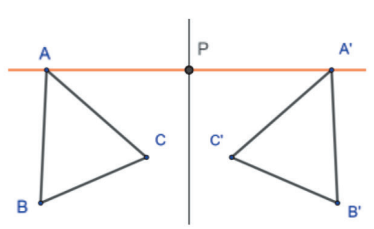


$$A \longrightarrow A'$$

Con base en la idea de movimiento, en un plano, las transformaciones geométricas pueden clasificarse en:

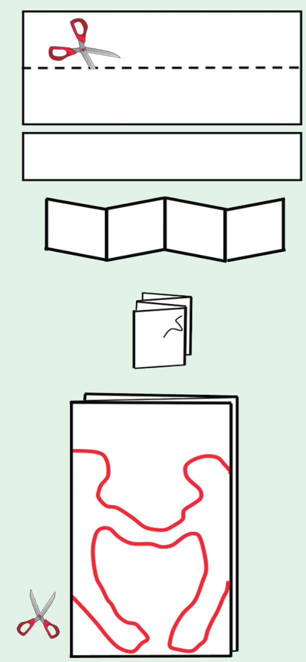
	Descripción	Efecto sobre la figura inicial
1	**Traslación:** es un movimiento de una figura en la que todos los puntos se desplazan en una misma dirección y con la misma distancia.	Se obtiene una imagen idéntica, desplazada en cierta dirección y a cierta distancia de la inicial.
2	**Rotación:** es un movimiento, alrededor de un punto llamado "centro de rotación", con cierto ángulo y sentido (ya sea en el sentido de las agujas del reloj, o contrario a estas).	Resulta una figura con el mismo tamaño y forma, pero que ha sido rotada.
3	**Simetría, con respecto a un eje:** es una reflexión, es decir: (1) Los puntos simétricos (o correspondientes) de la figura inicial y de la transformada están sobre la misma recta. 2) Los puntos de ambas figuras se encuentran a la misma distancia del eje de simetría.	La figura simétrica o reflejada tiene el mismo tamaño, pero con dirección opuesta.

Ahora, considera, por ejemplo, el triángulo ΔABC. En la tabla que sigue se describen los pasos para su traslación, rotación y simetría, con respecto a un eje.

	**Traslación** Considera la dirección que señala la flecha y la distancia de esta. En este caso, debes: (1) Trazar una paralela a la flecha dada, que pase por A. (2) Trasladar la distancia de la flecha a la paralela trazada antes, midiendo desde A. Con esto, obtendrás el punto A'. (3) Repetir estos pasos en los otros vértices.
	**Rotación** Toma como ejemplo el punto O señalado y un ángulo de 90º (con sentido anti-horario). (1) Traza el rayo $\overleftrightarrow{OA}$ (2) Traza un rayo perpendicular al anterior (con sentido anti-horario). (3) Traslada la distancia OA a este nuevo rayo. Con ello, obtendrás el punto A. (4) Repite estos pasos en los otros vértices.
	**Simetría, con respecto a un eje** Toma como ejemplo el eje de simetría dado. (1) Traza una perpendicular a este eje, que pase por A. Esta cortará al eje en P. (2) Traslada la medida AP, en la recta $\overleftrightarrow{AP}$, midiendo desde P, en este caso, hacia la derecha. Con esto, obtendrás el punto A'. (3) Repite estos pasos en B con los otros A'. vértices.

Ten en cuenta que, en estas transformaciones puedes escoger cualquier distancia, dirección, centro de rotación, ángulo y eje de simetría.

Las tradicionales cadenas de figuras, elaboradas en papel plegado, se basan en la idea de *transformación geométrica*.



- **Selecciona** una imagen geométrica de tu entorno, represéntala en tu cuaderno y *trasládala, rótala y refléjala* (escoge distancia, dirección, centro de rotación, ángulo y eje de simetría). Conversa, sobre tus ideas y soluciones, con el docente y el resto de tus compañeros.

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Actividad grupal

Construcción de la Pajarita nazarí

La traslación, rotación, simetría con respecto a un eje o axial y la **simetría respecto a un punto**, son transformaciones geométricas básicas, que permiten estudiar las figuras e incluso los cuerpos, con base en el movimiento.

Simetría respecto a un punto y la Pajarita nazarí

¿Qué haremos?

Comprender la idea de la simetría respecto a un punto y construir la Pajarita nazarí.

¿Qué necesitamos?

Regla, compás, lápices de colores y tijera.

¿Cómo nos organizamos?

Trabaja en parejas, expresa tus ideas sobre cada una de las preguntas planteadas y comparte cada una de las actividades propuestas.

¿Cómo lo haremos?

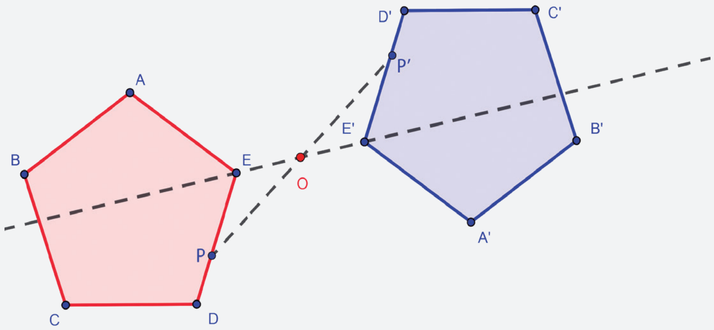
En primer lugar, seguirán el ejemplo de la simetría respecto a un punto, y luego, aplicarán esta idea para construir el mosaico conocido como Pajarita nazarí.

El formidable matemático Felix Klein (1849-1925), introdujo, formalmente, la idea del **movimiento** como base para el estudio de la geometría.

Imagen: https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein#/media/Archivo:Felix_Christian_Klein.jpg

Simetría respecto a un punto

Esta simetría también se conoce como "simetría central", de centro O y con respecto a un ángulo de 180º. Como ejemplo, tenemos el siguiente:



Observa la transformación de cada punto P, de la figura inicial, en un punto P´. Además, el ∠ POP' tiene como medida m ∠ POP'= 180°. Las distancias de O a P y de O a P´ son iguales.

Construye la Pajarita nazarí

- Traza un triángulo equilátero.
- Ubica, con apoyo en la regla y el compás, el centro del triángulo, también conocido como "baricentro".
- Traza los segmentos que unen al centro con cada vértice. Y biseca estos segmentos. Llama a estos puntos M1, M2 y M3.
- Traza una circunferencia con centro en M1 y que pase por el vértice más cercano. Repite este paso, considerando los puntos M2 y M3.
- Las regiones coloreadas en verde (observa la imagen adjunta) serán recortadas o eliminadas. Mientras que, las regiones en azul serán incorporadas a la figura final.
- El mosaico resultante es la Pajarita nazarí.

Presentación y socialización de las actividades

Una vez construida la imagen, uno de los miembros de cada equipo comunicará sus resultados, al resto de los grupos.

Coevaluación

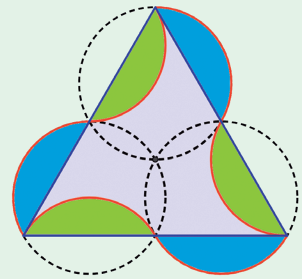
Los demás compañeros, junto al docente, realizarán observaciones y sugerencias sobre el proceso de construcción, así como, sobre el acabado final del mosaico. Valorando, en todo momento, el aporte del resto de los asistentes.

Autoevaluación

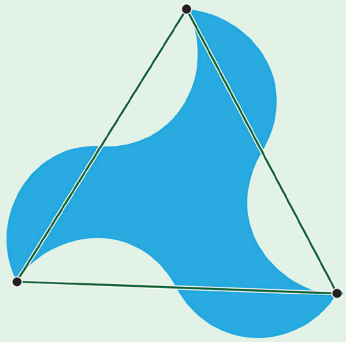
Responde a las siguientes preguntas:

¿Puede cubrirse el plano con esta figura? ¿Qué aprendiste en esta actividad? ¿Qué puedes mejorar?

La imagen que sigue, muestra una etapa del proceso de construcción de este peculiar mosaico.



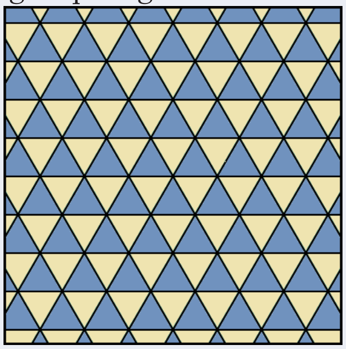
La figura final es la que sigue:



- Emplea, con precisión, herramientas tecnológicas, para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos, sobre conocimientos de numeración, fracciones y geometría, con números decimales y enteros.

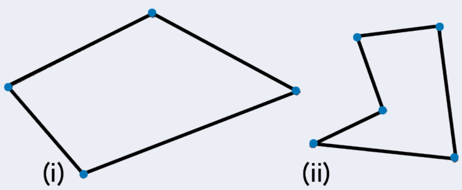
Evaluación

- Observa los triángulos coloreados de la imagen que sigue:



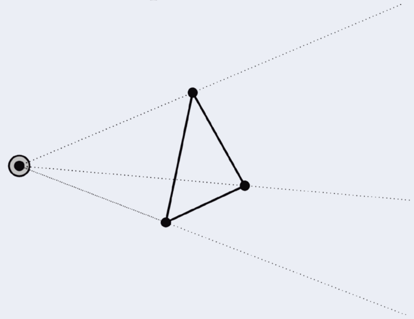
¿Son semejantes? ¿Son congruentes? Explica por qué.

- Aporta ejemplos de imágenes semejantes, presentes en tu entorno.
- Aporta ejemplos de figuras congruentes, presentes en tu entorno.
- Utiliza **Geogebra** para construir cuadriláteros semejantes a:



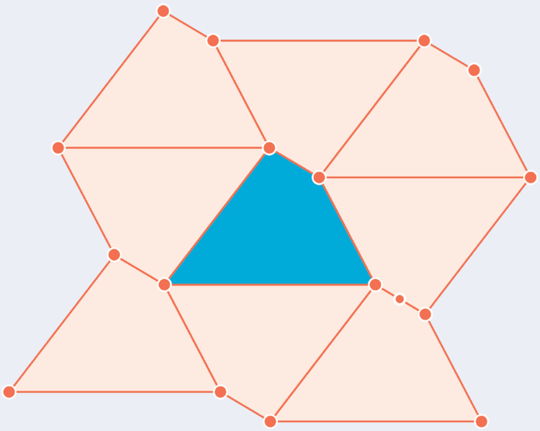
- Construye figuras congruentes a las dadas en la actividad anterior.
- Dada la flor de cuatro pétalos que se adjunta, ¿cuál es el menor ángulo de giro para que la imagen quede invariante? ¿Cuántos ejes de simetría tiene?

- Utiliza el método de la proyección **homotecia** para construir un triángulo, partiendo del que se muestra.



Toma como distancia d = 3 cm.

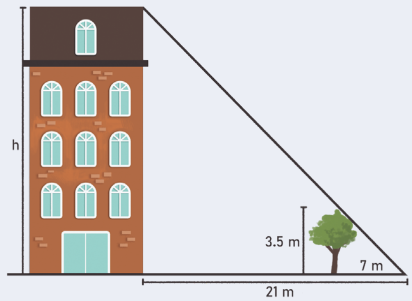
- Observa la figura que sigue. Partiendo de un cuadrilátero se inició el proceso de **teselar** el plano.



¿Cuál es la transformación geométrica que permite construir las otras imágenes?

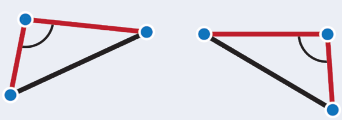
Idea un método, utilizando regla y compás, para construir otro de los cuadriláteros, partiendo del que se ha coloreado en azul.

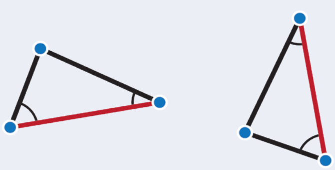
- Los rayos del sol, en cierto momento del día, proyectan la sombra de un edificio en el suelo, hasta 21 m de este.

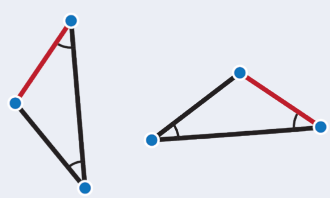


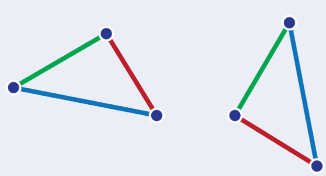
Un árbol, proyecta una sombra de 7 m. Si sabemos la altura del árbol, que es de 3.5 m, ¿es posible deducir la altura del edificio?

- ¿Cuál es el criterio que permite concluir que, los cuatro pares de triángulos que siguen son congruentes?

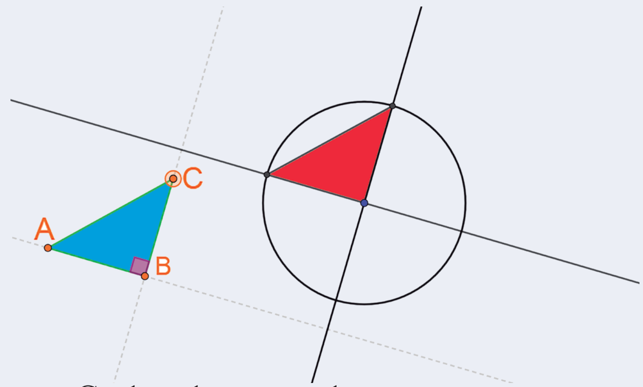
(i) 

(ii) 

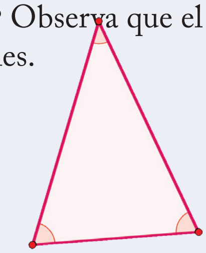
(iii) 

(iv) 

- Observa las imágenes que siguen. Describe los pasos para transformar la figura de la izquierda en la de la derecha. Realiza el proceso que has descrito utilizando regla y compás.

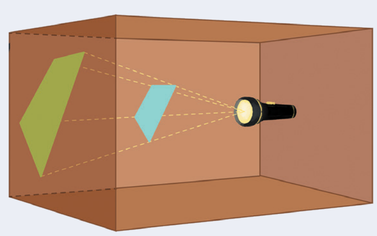


- ¿Cuál es el error en el siguiente razonamiento? Observa que el triángulo que sigue es isósceles.



Entonces, todos sus lados son congruentes. Conversa sobre tus ideas con tu docente y compañeros.

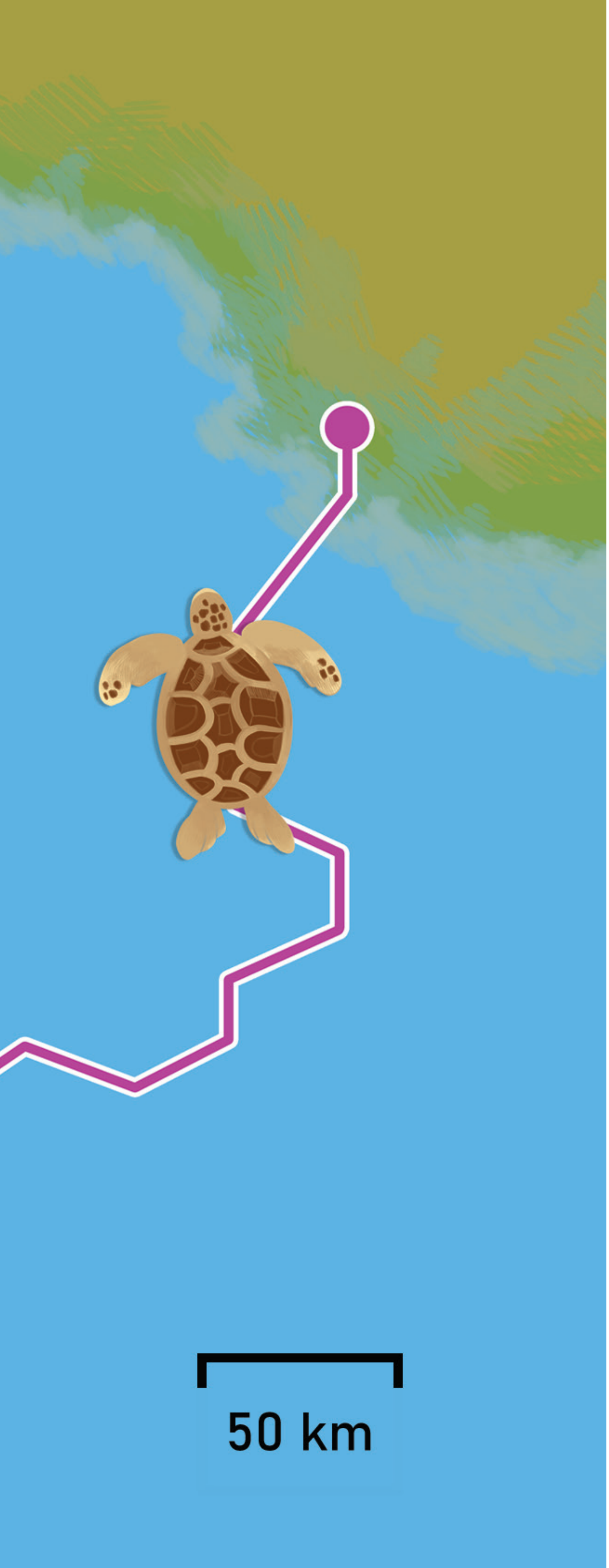
- Observa la imagen que sigue:



La luz de la linterna, al incidir sobre el polígono, proyecta una sombra sobre la pared. ¿La sombra y el polígono son congruentes? ¿Son semejantes? Argumenta tus respuestas.

Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 6

Medidas Lineales

Situación de aprendizaje

Situación de aprendizaje. Observa el recorrido de una tortuga, desde un punto de la costa, vía mar abierto hasta otro punto de la costa. El recorrido se ha registrado con apoyo en la tecnología satelital.

¿Cómo se puede calcular la distancia que recorrió esta tortuga? Razona una propuesta de método y conversa al respecto con tus compañeros y maestro.

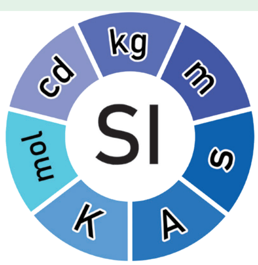
Contenido

- El metro, sus múltiplos y submúltiplos
- Pulgada, pie, yarda y milla
- Escalas en las reglas usando unidades del Sistema Internacional y del Sistema Inglés
- Relación entre las unidades del Sistema Internacional con las unidades del Sistema Inglés
- Perímetro de polígonos regulares, irregulares y círculos
- Actividad grupal
- Evaluación

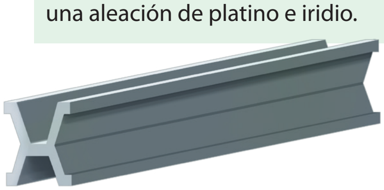
En la Conferencia Internacional de Pesos y Medidas llevada a cabo en la ciudad de París, en el año 1,889, se acordó el metro como unidad de medida para las longitudes.

La palabra metro se deriva del término griego "metron", que significa "medida".

El Sistema Internacional de Unidades, que se abrevia con las siglas SI, fue creado en el año 1,960, y consiste en un conjunto de unidades de medida que fueron acordadas por casi todos los países. Además del metro (*m*), se encuentran el segundo (s), el kilogramo (*kg*), el amperio (*A*), el kelvin (*K*), el mol (*mol*) y la candela (*cd*).



El metro patrón era una vara de medición que se utilizaba como estándar. Y estaba elaborado con una aleación de platino e iridio.



El metro, sus múltiplos y submúltiplos

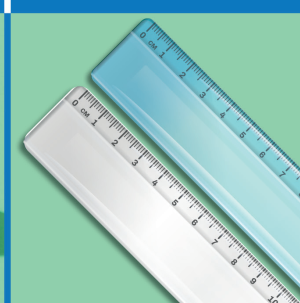
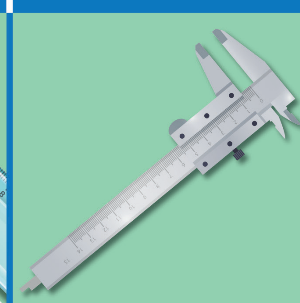
¿En qué consiste el sistema de numeración decimal? ¿Qué instrumentos de medida de longitud conoces?

El metro

La humanidad ha desarrollado diversos sistemas de medición de longitudes, los cuales han sido esenciales para muchas de sus actividades. Desde la antigüedad se han utilizado unidades de medida relacionadas con el cuerpo humano, por ejemplo: el pie, el paso, la pulgada, la cuarta, entre otras.

Sin embargo, con la modernidad hubo la necesidad de acordar una unidad de medida común a muchos países.

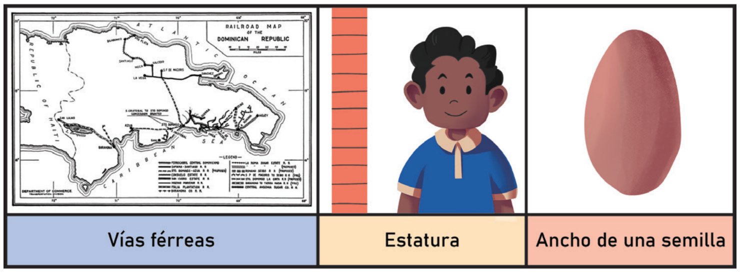
Es así como se acordó utilizar el **metro** como la medida fundamental para las longitudes. Su símbolo es la letra m (en minúscula). El metro es una de las medidas del **Sistema Internacional de Unidades (SIU).**

Cinta métrica	Regla	Vernier
		
Utilizada en la confección y costura, aunque también en muchas otras actividades.	Muy común en las actividades escolares, en el dibujo y en el diseño.	También llamado "calibrador" o "pie de Rey". Es un instrumento de alta precisión.

La cinta métrica, la regla y el vernier son algunos de los instrumentos que se utilizan para medir longitudes.

Unidades de medida de longitud mayores y menores

Hay situaciones, como en la medición de una vía férrea, en las que el metro resulta una unidad de medida muy pequeña, haciéndose necesario la definición de unidades de medida mayores, llamadas múltiplos del metro. Por otra parte, situaciones como la medición de la estatura de un niño, o bien, del ancho de una semilla, hacen necesario la definición de unidades de medida más pequeñas que el metro, éstas se llaman *submúltiplos* del metro.



Los múltiplos del metro más comunes son el decámetro (dam), el hectómetro (hm) y el kilómetro (km). Los submúltiplos del metro más comunes son el decímetro (dm), el centímetro (cm) y el milímetro (mm).

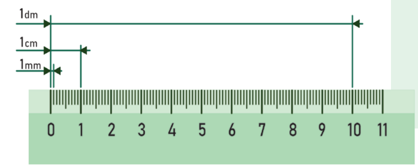
	×10	×10	×10	×10	×10	×10
kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000m	100m	10m	1m	0.1m	0.01m	0.001m
	÷10	÷10	÷10	÷10	÷10	÷10

Observa que 1 dam =10 m, 1 hm =100 m y 1 km =1,000 m. Y 1 dm =0.1 m, 1 cm=0.01 m y 1 mm=0.001 m. Todas estas medidas se obtienen multiplicando por potencias de 10 (en el caso de los múltiplos), o dividiendo entre potencias de 10 (en el caso de los submúltiplos).

La longitud de una vía férrea suele expresarse en km, la estatura en m y las dimensiones de muchos tipos de semillas en mm.

- **Investiga** la longitud de las vías férreas de la República Dominicana.
- **Investiga** las dimensiones de la semilla de la Rosa de Bayahíbe.
- ¿Cuál es la unidad más adecuada para medir la profundidad de un embalse?

Una regla graduada en *cm* y en *mm*. Además, se ha destacado en ella 1 *dm*.



Medir longitudes es una actividad matemática importante. Siempre que sea posible, se recomienda repetir varias veces este proceso, con la intención de buscar mayor precisión.

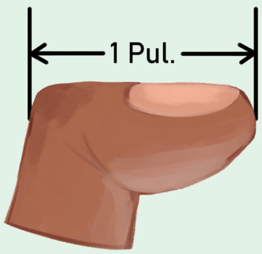
Fuente: Freepik

Una imagen de la **Rosa de Bayahíbe**, flor nacional de la República Dominicana.

- Comunica de manera coherente ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida con números decimales y enteros.

Pulgada, pie, yarda y milla

La pulgada como unidad de medida tiene su origen en la medida de la primera falange del dedo pulgar.



> ¿En cuáles situaciones se utiliza la pulgada, el pie, la yarda o la milla como unidades de medida de longitud?

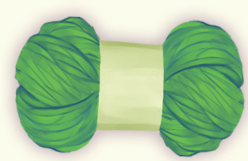
Las medidas de longitud en el sistema inglés

Además del **metro** como unidad de medida de longitud del *Sistema Internacional*, son comunes también las unidades del *Sistema Inglés*: la **pulgada**, el **pie**, la **yarda** y la **milla**. Como advertirás, la pulgada tiene relación con la medida de la falange extrema del dedo pulgar; es decir, es una medida relacionada con las proporciones del cuerpo humano (en Matemáticas, a este tipo de unidades de medida se les llama antropométricas).

Español	Inglés	Abreviación	Equivalencias
Pulgada	inch	in	1 in
Pie	foot	ft	1 ft = 12 in
Yarda	yard	yd	1 yd = 36 in
Milla	m	mi	1 mi = 63,360 in

La tabla anterior muestra las equivalencias del pie, la yarda y la milla con respecto a la pulgada.

Dependiendo del objeto a medir, o de cuan distantes estén los puntos, tal medida puede expresarse en la unidad más adecuada. Por ejemplo: las dimensiones de un libro o las de una hoja de papel suelen expresarse en *pulgadas*, las de un refrigerador suelen darse en *pies*, y la longitud del hilo para tejer en un ovillo se da, comúnmente, en *yardas*. Ahora bien, otras longitudes, como la de una red vial, pueden darse en *millas*.

		
Libro	Refrigerador	Ovillo de hilo
pulgadas	*pies*	*yardas*

Cada instrumento de medición de longitudes (bien sea la regla, la cinta métrica, el vernier, entre otros) tiene un grado de precisión y, naturalmente, un margen de error.

Dependiendo de la actividad a desarrollar, debes seleccionar el instrumento de medición que mejor se corresponda.

El mapa muestra el Metro de Santo Domingo, uno de los más modernos de toda Latinoamérica. Su línea 1 tiene una longitud de 9 *mi* y su línea 2 tiene 21.1 *mi*.

Observa las equivalencias entre las unidades del sistema inglés

Puedes expresar una de estas unidades en función de cualquiera de las otras.

Ejemplo: el sistema de transporte público vial, o **Metro de Santo Domingo**, tiene una longitud total (incluyendo las líneas 1 y 2) de 30.1 mi. ¿Cuántas pulgadas, pies y yardas equivalen a 30.1 mi?

- Con base en la relación: 1 mi = 63,360 in, puedes escribir que:

  30.1 mi =30.1 · 63,360 in. Entonces

  $$30.1 \text{ mi} = 1{,}907{,}136 \text{ in.}$$

  Es decir, 30.1 millas equivalen a un millón novecientas siete mil ciento treinta y seis pulgadas.

- ¿Cuántos pies equivalen 30.1 mi? Para ello puedes basarte en la relación: 1 ft =12 in. Dividiendo entre 12 cada lado de la igualdad, se obtiene que : $\frac{1}{12}$ ft =12/12 in. Por tanto: $\frac{1}{12}$ ft=1 in. Ya con esto puedes escribir:

  $$30.1 \text{ mi} = 1{,}907{,}136 \text{ in} = 1{,}907{,}136 \cdot \frac{1}{12} \text{ ft} = 158{,}928 \text{ ft}$$

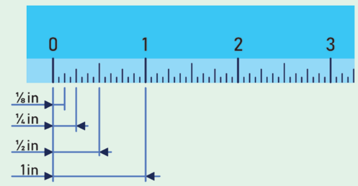
- Solo falta una conversión: ¿cuántas yardas equivalen 30.1 mi? Para ello debes apoyarte en la relación: 1 yd = 36 in. Para ello, al dividir entre 36 cada lado de la igualdad se tiene que: $\frac{1}{36}$ yd = $\frac{36}{36}$ in. Es decir, $\frac{1}{36}$ yd =1 in. Ahora:

  $$1 \text{ mi} = 63{,}360 \text{ in} = 63{,}360 \cdot \frac{1}{36} \text{ yd} = 1{,}760 \text{ yd.}$$

  Por tanto:

  $$30.1 \text{ mi} = 30.1 \cdot 1{,}760 \text{ yd} = 52{,}976 \text{ yd.}$$

Las unidades menores que la pulgada se dividen en mitades, llamadas comúnmente fracciones de la pulgada. En la imagen que sigue se muestran algunas de éstas: $\frac{1}{2}$ in, $\frac{1}{4}$ in y $\frac{1}{8}$ in.

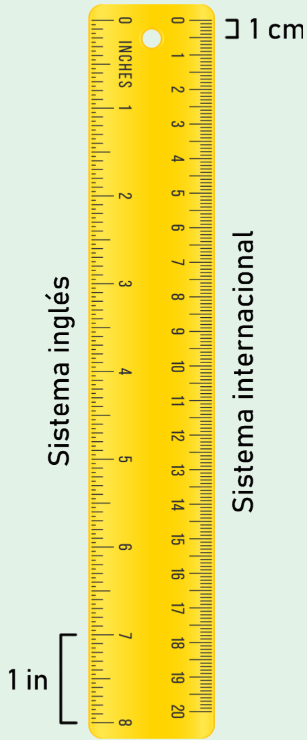


Otra manera de simbolizarlas es: $\frac{1}{2}$", $\frac{1}{4}$" y $\frac{1}{8}$".

- ¿Cuántas yardas equivalen a la longitud de la *Línea* 1 *del Metro de Santo Domingo?*
- ¿Cuántas yardas equivalen a la longitud de su *Línea* 2?
- **Elabora** una tabla con tu estatura y la de cuatro de tus compañeros. Expresa esos valores en pies y en pulgadas.

- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del sistema métrico decimal (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el sistema inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos, volumen, capacidad y temperatura en las escalas Celsius y Fahrenheit.

Una regla graduada en cm y en *in*:



La precisión en la medición de la longitud de un objeto, de un recorrido, o bien, de la distancia entre dos puntos, depende de muchos factores, entre ellos se encuentra la precisión del instrumento de medición utilizado, y también, los cuidados que se tengan durante el proceso de medición.

Escalas en las reglas usando unidades del Sistema Internacional y del Sistema Inglés

¿Cuál es la relación entre la circunferencia y el diámetro de una circunferencia?

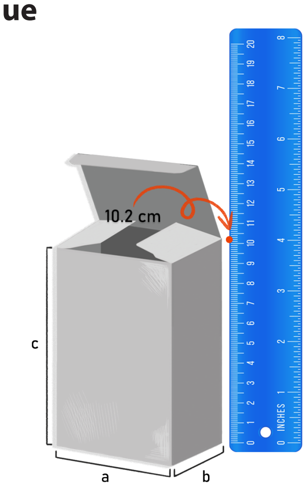
Observa una regla con dos escalas

Observa la regla que se muestra al margen. Ella tiene, por un lado, marcas para los centímetros y, además, tiene marcas para uno de sus submúltiplos: los milímetros. Es por esta razón, que hay diez divisiones entre dos centímetros consecutivos.

Por el otro lado, tiene marcas para las pulgadas; incluyendo otras marcas para algunas de sus fracciones: $\frac{1}{2}$ ", $\frac{1}{4}$ ", $\frac{1}{8}$ " y $\frac{1}{16}$ ". Es por ello por lo que hay dieciséis divisiones entre dos pulgadas seguidas.

Estimando las dimensiones de un empaque

Ejemplo 1: para conocer las dimensiones de un empaque, tal como el que se muestra en la figura, es suficiente con indicar las medidas *a, b* y *c*, es decir, su largo, ancho y altura.



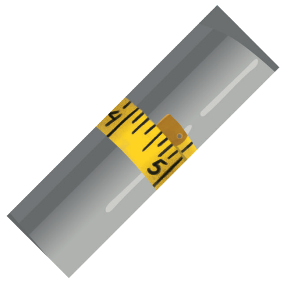
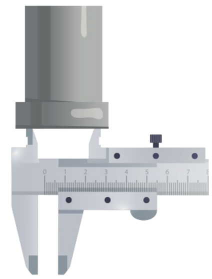
Para estimar *a, b* y *c* puedes apoyarte en la regla, haciendo coincidir el 0 con el extremo de la arista a medir, tratando de ser lo más preciso posible. En este caso, *c* ≈ 10.2 *cm* (c es aproximadamente 10.2 *cm*). O bien, puedes apoyarte en la escala dada en pulgadas. En ese caso se obtendría: c ≈ 4 *in*.

De forma similar se estiman las medidas de *a* y *b*.

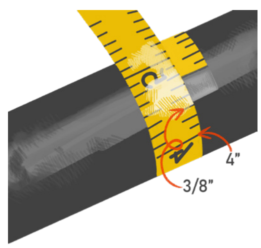
Calculando el diámetro de un tubo

Ejemplo 2: una situación bastante común tiene que ver con medir el diámetro de las tuberías de agua potable en nuestros hogares, en ocasión de alguna ampliación o reparación (lo que también se da en el caso de las tuberías de gas o de desagüe).

¿Cómo medir su *diámetro* interior y exterior? En realidad, existen muchos métodos para ello.

1	2	3
		
Si la tubería tiene un corte transversal, tal como en la imagen de arriba, puedes utilizar una regla.	Si la tubería está encofrada y no tienes acceso a sus extremos, puedes utilizar una cinta graduada flexible.	También puedes utilizar instrumentos de mayor precisión, como el vernier o calibrador.

Supongamos que afrontamos una situación como la 2.ª que se indica en la tabla anterior y que la longitud de la circunferencia es de 4 y $\frac{3}{8}$" (cuatro pulgadas más tres octavos de pulgada). Observa que la circunferencia del tubo abarca, además de las 4" que indica la cinta, 3 marcas. Como en esa cinta hay 8 divisiones entre pulgadas consecutivas, entonces esas tres marcas se corresponden con $\frac{3}{8}$ ".



Ahora, conociendo la longitud de la circunferencia (C) puedes calcular su diámetro (aquí sería el diámetro exterior), así: $\frac{C}{d}=\pi$. De esta expresión se puede concluir que: $\frac{C}{\pi}=d$.

Por tanto:

$$d=\frac{4+\frac{3''}{8}}{\pi}\approx\frac{\frac{35''}{8}}{3.14}\approx 1.39''$$

- Si al **medir** la circunferencia de un tubo resulta 6.9 in, ¿cuál es su diámetro?
- **Selecciona** algunas cajas y construye una tabla en la que describas sus dimensiones (es decir, la longitud de su ancho, de su largo y de su altura).
- **Construye** una regla (puede ser con cartulina) con escalas tanto en el Sistema Internacional como en el Sistema Inglés.

En una tubería se distinguen dos diámetros: uno exterior y uno interior. En el primero, tal como puedes observar en la imagen que sigue, se suma el espesor del tubo. En cambio, en el segundo, este espesor no se suma.

$\frac{C}{d}=\pi$ es la conocida relación que vincula la longitud de la circunferencia con la longitud del diámetro. Tal cociente es igual al número π.

Ahora bien, si multiplicas por d cada lado de la igualdad, obtienes:

$d\cdot\frac{C}{d}=d\cdot\pi$

Es decir:

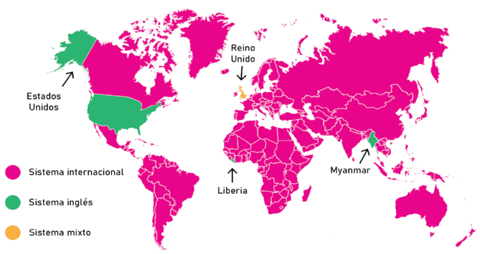
$C=d\cdot\pi$

- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

En el año 1,959 se acordó que una pulgada equivaldría a 2.54 centímetros en todo el mundo.

Dejando atrás a la pulgada romana, la española y la francesa.

En la actualidad, el Sistema Inglés se utiliza, por ejemplo, en Estados Unidos, Liberia y Myanmar, entre otros. Sin embargo, en casi todos los demás países se emplea el Sistema Internacional, tal como puedes observar en el mapa que sigue.



Para multiplicar:

0.0808 · 2.54

puedes utilizar la calculadora disponible en *GeoGebra*.
Y, como sabes, el producto de

0.0808 · 1

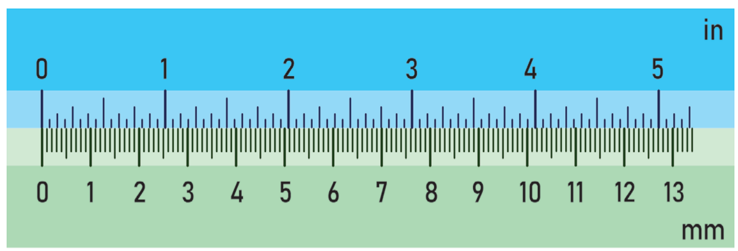
es igual a 0.0808; ya que el producto de cualquier número multiplicado por 1 es igual a ese número (esta es la propiedad de la identidad multiplicativa).

Relación entre las unidades del Sistema Internacional con las unidades del Sistema Inglés

¿Cuál es la unidad básica de medida de longitud del Sistema Internacional?
¿Cuál es la unidad correspondiente en el Sistema Inglés?

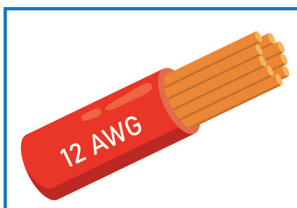
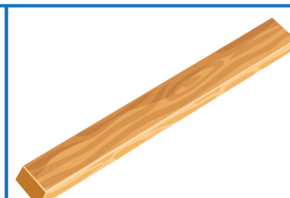
Observa la relación entre centímetros y pulgadas

Una pregunta básica al utilizar dos o más unidades de medida es, ¿cuál es la relación entre ellas? Éste es el caso entre las unidades que abarca el *Sistema Internacional* y las que corresponden al *Sistema Inglés*. Así que, como te das cuenta, es importante la pregunta, ¿cuántos centímetros equivalen a una pulgada?



La relación entre ambas unidades es la siguiente: 1 in = 2.54 cm (una pulgada equivale a 2.54 centímetros). Si opones dos reglas, una graduada en cm y otra graduada en in, haciendo coincidir el 0 de ambas escalas, podrás observar, con cierto grado de aproximación, la relación anterior.

Reflexiona sobre la necesidad de comprender ambos sistemas

		
Cable de calibre 12. Éste tiene un diámetro de 0.0808 in.	Un tornillo de acero “auto-taladrante” con una longitud de $\frac{1}{2}$ in.	Listón de madera con un espesor de 2 in.

Cable de calibre 12. Éste tiene un diámetro de 0.0808 *in*. Un tornillo de acero “auto-taladrante” con una longitud de $\frac{1}{2}$*in*. Listón de madera con un espesor de 2 *in*.

Las múltiples relaciones culturales, científicas, tecnológicas, comerciales y de comunicación entre la República Dominicana y el resto de los países hacen necesario manejar ambos sistemas de medidas.

De hecho, productos como los tornillos, los perfiles de metal, las maderas aserradas, los cables para la conducción eléctrica, las pantallas de los televisores y muchos otros, están expresados comúnmente en pulgadas (observa la tabla anterior).

Expresa pulgadas en centímetros

Ejemplo 1: se conoce que un cable tiene un diámetro de 0.0808 *in*, ¿a cuántos centímetros equivale esta longitud?

Para responder esto debes apoyarte en la relación 1 *in*=2.54 *cm*. Hacemos uso de la "Regla de Tres" que estudiamos en la pagina 50 y escribimos:

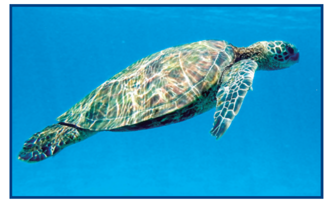
$$\begin{aligned}1\ in &= 2.54\text{ cm}\\ 0.0808\ in &= x\text{ cm}\\ 1\ in \times x\text{ cm} &= 0.0808\ in \times 2.54\text{ cm}\\ x\text{ cm} &= \frac{0.0808\ in \times 2.54\text{ cm}}{1\ in} = 0.0808\ in \times 2.54\text{ cm}\\ x\text{ cm} &= 0.205232\text{ cm} \approx 0.2\text{ cm}\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir: $0.0808\ in \approx 0.2$ cm

Ejemplo 2: si un tornillo tiene una longitud de $\frac{1}{2}$*in*, ¿cuál es su longitud expresada en *cm*? Tal como se procedió en el ejemplo previo, hacemos uso de la "Regla de Tres".

$$\begin{aligned}1\ in &= 2.54\text{ cm}\\ \frac{1}{2} in &= x\text{ cm}\\ 1\ in \times x\text{ cm} &= \frac{1}{2} in \times 2.54\text{ cm}\\ x\text{ cm} &= \frac{\frac{1}{2} in \times 2.54\text{ cm}}{1\ in} = \frac{1}{2} in \times 2.54\text{ cm} = 1.27\text{ cm}\\ x\text{ cm} &= 1.27\text{ cm} \approx 1.3\text{ cm}\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir: $\frac{1}{2} in \approx 1.3$ cm



Fuente: Freepik

La Tortuga de Carey es una de las especies que son características de la fauna de la República Dominicana.
Un adulto tiene una longitud promedio de 82.2 *cm*, es decir, aproximadamente 32.4 *in*.
Todos nosotros tenemos un papel importante en la conservación de ésta y todas las especies.

- Si el espesor de un listón de madera es 2 *in*, ¿cuál es su conversión a *cm*?
- **Investiga** cuáles otros productos tienen medidas expresadas en pulgadas y haz la conversión a *cm*.
- **Comprueba** que la longitud promedio de un adulto de Tortuga de Carey (82.2 *cm*) equivale, aproximadamente, a 32.4 *in*.

- Emplea con precisión herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

Perímetro de polígonos regulares, irregulares y círculos

El cálculo del perímetro de polígonos es de mucha importancia en muchas disciplinas aplicadas, por ejemplo, en el caso del diseño de estructuras y maquinarias para la construcción.

Fuente: Freepik.com

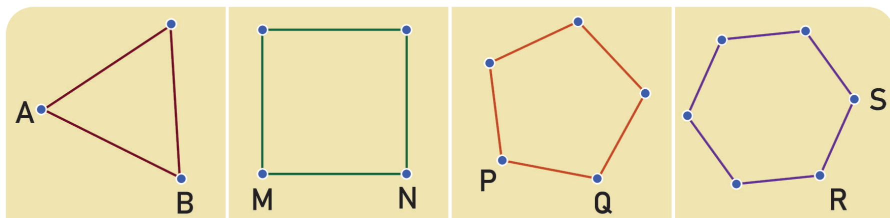
La torre que se muestra está construida con base en sucesiones de triángulos.

¿Qué es un polígono regular? ¿Qué es un polígono irregular?

Observa cómo calcular el perímetro de un polígono

El perímetro de un polígono regular, tal como los que se muestran en la tabla siguiente, se calcula sumando las medidas de todos sus lados. Observa que, si la medida de uno de los lados de un triángulo equilátero es AB, entonces su perímetro (simbolizado con la letra P) es:

P = AB + AB + AB =3 · AB; ya que, todos sus lados tienen la misma medida.



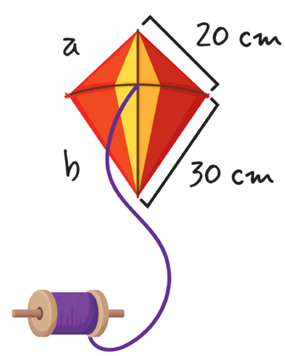
Triángulo	Cuadrado	Pentágono	Hexágono
P = 3 • AB	P = 4 • MN	P = 5 • PQ	P = 6 • RS

En general, si un polígono regular tiene n lados y conoces la medida de uno de sus lados, digamos que es *AB*, entonces:

$$P = n \cdot AB$$

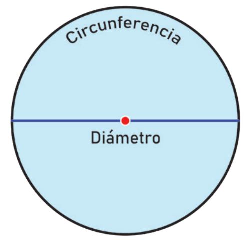
En un polígono irregular, al menos uno de sus lados tiene una longitud distinta a la longitud de los demás lados. En este caso, para calcular su perímetro, simplemente sumas la medida de todos sus lados.

Ejemplo 1: la chichigua de la imagen tiene forma de polígono. Es un cuadrilátero, pero no es regular. De hecho, a mide 20 *cm* y b mide 30 *cm*, ¿cuál es su perímetro? Para calcularlo, puedes escribir:



P = 20 cm + 20 cm + 30 cm + 30 cm = 100 cm

Calcula el perímetro de un círculo

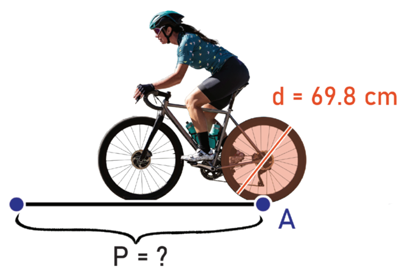


Como sabes, en un círculo su diámetro (d) y su circunferencia (C) verifican la igualdad: $\frac{C}{d}=\pi$. Es decir, $C = \pi d$ (la circunferencia es Pi veces el diámetro).

Por tal razón, el perímetro del círculo coincide con la medida de su circunferencia. Entonces, puedes escribir que:

$$P_o = \pi d$$

Ejemplo 2: se ha medido, aproximando hasta las décimas, el diámetro del neumático de una bicicleta de ruta, obteniéndose que d = 69.8 cm. Si se coloca una marca en la circunferencia externa del neumático, justo en el punto en que toca el suelo (en la figura tal marca se etiquetó con la letra A), ¿a qué distancia volverá ese punto a tocar el suelo?



Observa que esta distancia es igual a la medida de la circunferencia externa del neumático, es decir, es igual a su perímetro. Entonces:

$$P_o = \pi \cdot 69.8\ cm$$

Ahora se utilizará el símbolo ≈ (en vez de la igualdad) pues se aproximará π a dos decimales.

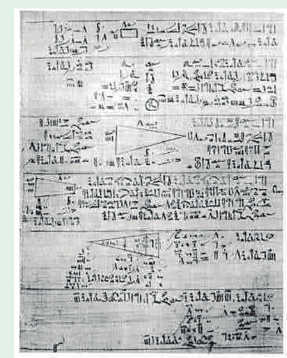
$$P_o \approx 3.14 \cdot 69.8\ cm$$

$$P_o \approx 219.172\ cm$$

La letra π es la inicial de la palabra griega: **περίμετρον**, que significa "perímetro".

Algunas culturas antiguas, como la egipcia, la india, la china y la mesopotámica, ya conocían este importante número.

Por ejemplo, en el papiro Rhind (observa la imagen que sigue) (escrito hace aproximadamente 3,800 años), en el seno de la cultura egipcia, se da una aproximación de π.



Fuente: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ahmes/.

- **Estima** el perímetro del aula de clases.
- ¿Cuál es el perímetro de un rombo cuyo lado mide 1 cm?
- **Idea** un método para estimar el perímetro de tu escuela y aplícalo en la práctica. Conversa con tus compañeros y tu maestro sobre tu método y resultados, así como la manera en que puedes ser más preciso en la estimación.
- Dibuja un cuadrado cuyo lado mida 5 cm.

- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con los números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Actividad grupal

Estimando grandes distancias

En la interpretación de las informaciones que contiene un mapa intervienen muchos conceptos y procedimientos matemáticos. En este trabajo grupal se aplicará las ideas de longitud entre dos puntos, la proporcionalidad dada por la escala, y la conversión de unidades de longitud entre el Sistema Internacional y el Sistema Inglés.

¿Qué haremos?

Con base en un mapa de la República Dominicana estimarán grandes distancias.

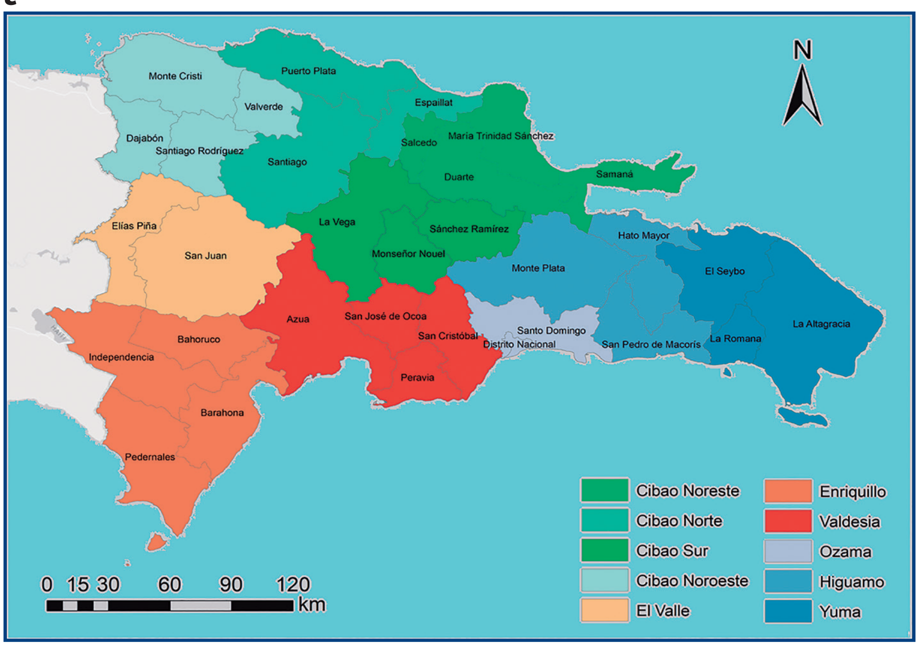
¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra, compás, lápiz, lápices de colores y papel.

¿Cómo nos organizamos?

Trabaja en parejas y expresa tus ideas sobre cada una de las actividades y preguntas planteadas.

¿Cómo lo haremos?



En el mapa que se muestra están representadas las 31 provincias y 1 Distrito Nacional en las cuales está organizada la República Dominicana, así como las Regiones de Desarrollo que caracterizan su división administrativa. Observa, además, que este mapa indica (abajo a la izquierda) una escala.

Puedes consultar otros mapas de la República Dominicana en la página del **Instituto Geográfico Nacional "José Joaquín Hungría Morell"**:

Esta escala indica una correspondencia entre la distancia dada en el mapa con la distancia real sobre la superficie terrestre. En otras palabras, una escala funciona como una especie de regla de medición en ese mapa.

Puedes, también, seleccionar dos ciudades y ubicarlas en el mapa. Para ello puedes consultar un mapa político y compararlo con el que reprodujiste en tu cuaderno.

Y, finalmente, estimar la distancia entre esas dos ciudades.

Ya con estas ideas, están en condiciones de realizar las actividades que se describen a continuación.

En primer lugar, reproduce el mapa dado en tu cuaderno.

a. Estima la distancia más corta entre las provincias de El Seibo y Sánchez Ramírez. En éste, y en los demás casos, traza el segmento de recta que une estos puntos geográficos.

b. ¿Cuál es la distancia más corta entre las provincias de Independencia y Salcedo?

c. ¿Cuál es la distancia más corta entre Pedernales y Monseñor Nouel?

d. ¿Cuál es la distancia entre el punto geográfico más al norte del territorio de la *República Dominicana* con su punto más al sur?

e. Repite la actividad anterior, pero esta vez considerando los puntos geográficos más al oeste y al este.

f. Organiza en una tabla todos los datos que has obtenido.

g. Finalmente, convierte las distancias que estimaron en millas.

Presentación y socialización de las actividades

Ya con todas las estimaciones y sus conversiones (de km a mi), uno de los miembros de cada equipo comunicará sus resultados a los demás compañeros y a su maestro.

Coevaluación

Los demás compañeros, junto a su maestro, realizarán observaciones y sugerencias sobre el proceso y las estimaciones; valorando en todo momento los aportes de todos.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste en esta actividad?, ¿qué puede s mejorar? ¿Cómo puedes ser más preciso en las estimaciones?

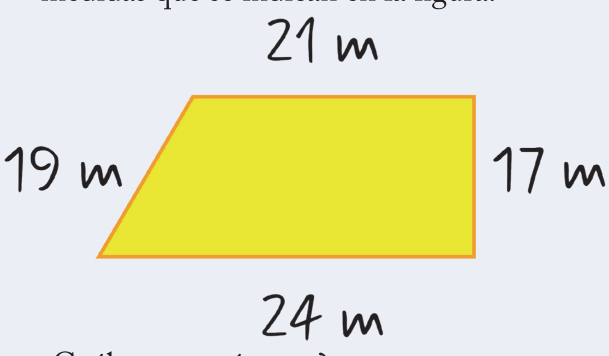
- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del Sistema Internacional (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el Sistema Inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos.

- ¿Cuál es la unidad de medida (en el *Sistema Internacional)* más adecuada para medir la longitud en cada uno de los casos que siguen?
  - Un tornillo
  - Un rollo de hilo para coser
  - Una pista para ciclismo
  - La distancia entre dos ciudades
  - El espesor de la epidermis.

¿Y en el *Sistema Inglés*?

- ¿Cuál es la unidad de medida adecuada (en el *Sistema Internacional*), para expresar la longitud de una tela? ¿Y cuál lo es en el *Sistema Inglés*?

- ¿A cuántas pulgadas equivale 1 cm?
- ¿A cuántas pulgadas equivale 0.1 cm?
- Escribe tu estatura tanto en el Sistema Internacional como en el Sistema Inglés.
- Un portarretratos rectangular tiene un lado que mide 21 cm y el otro mide 15 cm. ¿Cuánta cinta se necesita para cubrir todos sus bordes?
- Un conuco tiene forma de trapecio, con las medidas que se indican en la figura.

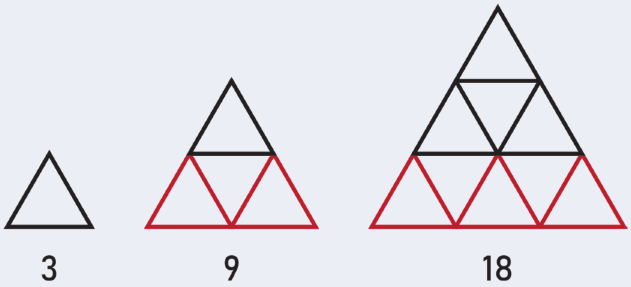


¿Cuál es su perímetro?

- Una chichigua se construyó con la forma que se muestra en la imagen. De hecho, es un polígono estrellado en el que todos sus lados son congruentes y miden 15 cm.

¿Cuál es su perímetro?

- Se han dispuesto palillos tal como en la figura que sigue. Cada palillo tiene una longitud de 1 in.



Por tanto, la suma de las longitudes de los palillos en la figura de la izquierda es 3 in y la suma en la figura del centro es 9 in, ¿cuál es la suma en la figura de la derecha?

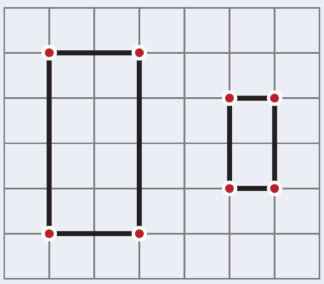
- Idea un método para estimar la altura de tu salón de clases. Solo puedes utilizar como instrumentos de medida: la regla, la escuadra y un cordón o hilo. Compara tu estimación con la de tus compañeros y discute tanto el proceso como el resultado con tu maestro. ¿Cómo puede mejorarse la estimación?

- Investiga las medidas promedio de la semilla de la Rosa de Bayahíbe. ¿Cuál es la unidad de medida más adecuada para expresar su largo y su ancho (en el Sistema Internacional)?

- Cuenta, siempre que sea posible, el número de pasos desde tu casa hasta la Escuela. Luego, con apoyo de tu mestro, mide la longitud de tu paso.

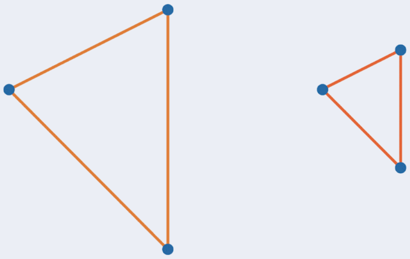
  Con estos datos, estima la distancia del recorrido anterior.

- La imagen que sigue muestra dos polígonos semejantes.



  ¿Cuál es el perímetro de cada uno?, ¿existe una relación entre ambos perímetros?

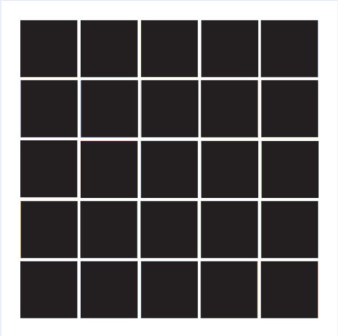
- Utiliza una regla graduada en cm y en mm para medir cada uno de los lados de los triángulos que se muestran.



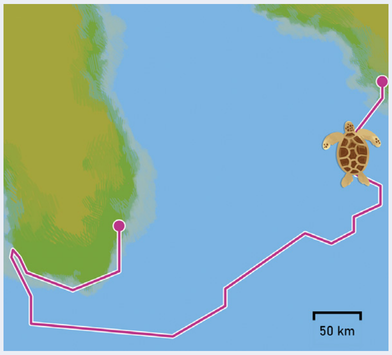
  ¿Son semejantes?, ¿cuál es el perímetro de cada uno de estos triángulos?, ¿existe alguna relación entre el perímetro de ambos?

- Se debe construir un tablero como el que se muestra.

  Cada casilla debe tener 1 in a cada lado y las líneas (coloreadas en negro) deben tener un ancho de $\frac{1}{16}$ in. Con esta información, calcula al ancho y el alto total del tablero.



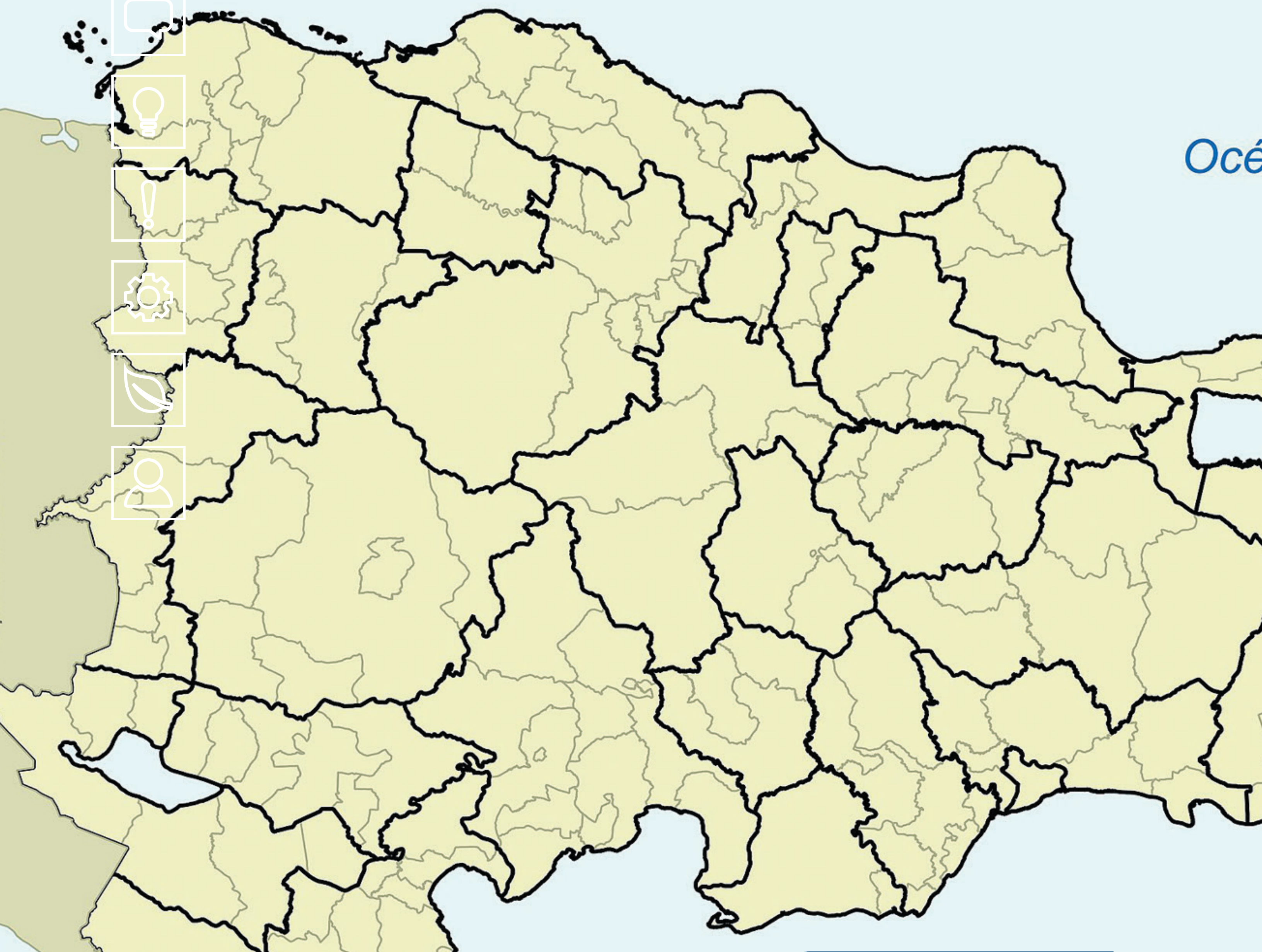
- Una tortuga tuvo el siguiente recorrido.



  Sus datos fueron registrados con apoyo satelital. Con base en la escala que se expone en el mapa, calcula la distancia que recorrió la tortuga.

- El mapa que sigue muestra una parte de la ciudad de Santo Domingo.

  ¿Estima la distancia entre el Jardín Botánico Nacional y la Estación Máximo Gómez?



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.

Fuente: wikicommons

Unidad 7

Medidas de áreas

Situación de aprendizaje

Observa el mapa de la República Dominicana, ¿cómo puedes estimar el área de su superficie terrestre?

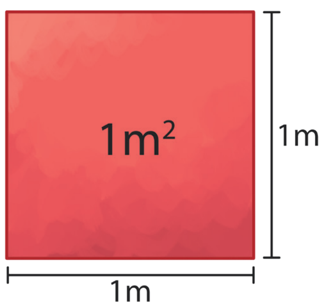
Contenido

- Unidades de área en el Sistema Internacional
- Conversión entre unidades de área
- Área de cuadriláteros y triángulos
- Área de círculos
- Estimación de Áreas
- Actividad grupal
- Evaluación

Unidades de área en el Sistema Internacional

Área: es la medida de la extensión de una figura. De acuerdo con el Sistema Internacional, la unidad de medida del área de una figura, también conocida como unidad de superficie, es el metro cuadrado (m^2).

Un metro cuadrado ($1\ m^2$) es el área de un cuadrado cuyos lados miden 1 m:



¿Cuál es la unidad de medida de longitud en el Sistema Internacional? ¿Cuáles son sus unidades mayores y menores?

Reflexiona sobre el concepto de área

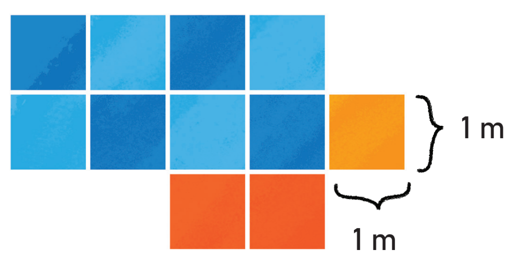
El cálculo del área de una figura plana consiste en determinar la cantidad de unidades de superficie que caben en ésta.

Ejemplo 1: un mural se ha construido componiendo cuadrados de colores. Cada cuadrado tiene lados que miden 1 m. Observa que cada uno de estos cuadrados tiene un área de $1\ m^2$. Como el mural consta de 10 cuadrados, entonces el área del mural es:

$$A = 10\ m^2$$

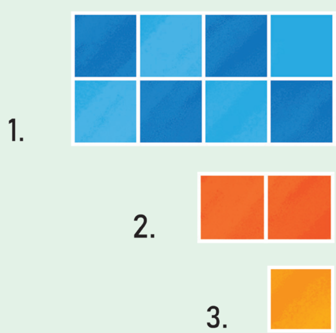
Como el mural tiene forma de rectángulo, obtendrás el mismo resultado si multiplicas la longitud de su base por la longitud de su altura, así: $A = 5\ m \cdot 2\ m = 10\ m^2$.

Ejemplo 2: si la figura no es rectangular, pero puede descomponerse en rectángulos, el área de toda la figura es la suma de las áreas de cada una de sus "partes". En el caso de la figura adjunta, su área es:



$$A = 8\ m^2 + 2\ m^2 + 1\ m^2 = 11\ m^2.$$

La figura del **ejemplo 2** se descompuso en las siguientes partes:



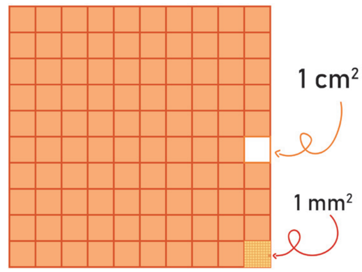
Unidades de área menores y mayores

Con los submúltiplos del metro pueden definirse unidades de superficie menores que $1\ m^2$. Tal es el caso del decímetro cuadrado (dm^2), del centímetro cuadrado (cm^2) y del milímetro cuadrado (mm^2).

Del mismo modo, con los múltiplos del metro, se tendrán unidades de superficie mayores que 1 m^2: el decámetro cuadrado (dam^2), el hectómetro cuadrado (hm^2) y el kilómetro cuadrado (km^2).

Por ejemplo, si trazas un cuadrado de lado 1 cm, su área es:

$$A=1\text{ cm}\cdot 1\text{ cm}=1\text{ cm}^2$$



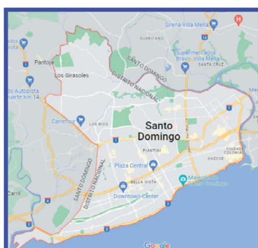
En un cuadrado de área 1 cm^2 hay 100 cuadrados de área 1 mm^2.

Un cuadrado de lado 10 mm, tendrá como área:

$$A=10\text{ mm}\cdot 10\text{ mm}=100\text{ mm}^2$$

Es decir, en un cuadrado cuyo lado mide 10 cm, hay 100 cuadrados de lado 1 cm.

Para cada situación, objeto o contexto existe una unidad de superficie adecuada para describirla. El área de una provincia, de un lago o de un país suelen expresarse en km^2, mientras que el área de una vivienda o una plaza se expresan, comúnmente, en m^2. La sección de un cable o una placa para un circuito eléctrico, se expresan en mm^2.

		
Mapa de Santo Domingo	Croquis de una vivienda	Sección de un cable
Km^2	m^2	mm^2

- **Utiliza** papel milimetrado para representar: 1 mm^2, 1 cm^2, y 1 dm^2.
- **Da** ejemplos de otras situaciones que puedan describirse a través de km^2, m^2, y mm^2.
- **Investiga** cuáles son las reservas naturales de tu provincia y describe su superficie.

También puedes escribir el producto

A = 10 cm ·10 cm, como un producto de potencias de igual base, así:

A = 10 cm ·10 cm =10^2 cm^2

Para luego hacer el cálculo correspondiente:

A =100 cm^2.

- Comunica de manera coherente ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

Conversión entre unidades de área

Observa que un cuadrado de lado 100 m, tiene como área A =100 m ·100 m =10,000 m^2 (que es 100 veces mayor que el área de un cuadrado de lado 10 m).

¿Cuál es el factor de conversión entre unidades de medida de longitud?

Observa la relación entre las unidades de área

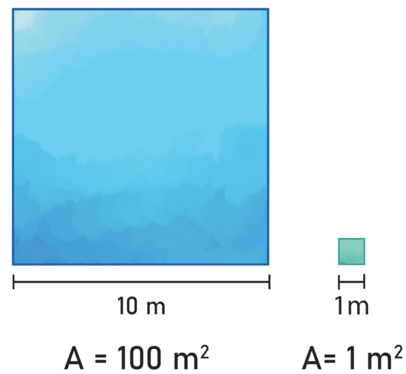
Si comparas el área de un cuadrado de lado 1 m con el área de un cuadrado de lado 10 m, verás que el área del segundo cuadrado es 100 veces el área del primer cuadrado. En efecto:

$A_{\text{1er cuadrado}} = 1\ m \cdot 1\ m = 1\ m^2$

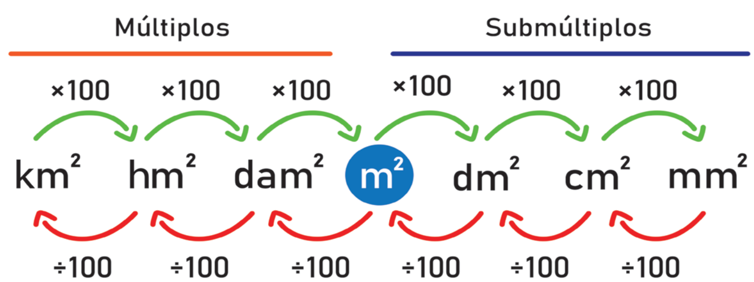
$A_{\text{2do cuadrado}} = 10\ m \cdot 10\ m = 100\ m^2$

Es decir:

$A_{\text{2do cuadrado}} = 100 \cdot A_{\text{1er cuadrado}}$



En general: una unidad de área es 100 veces mayor que la unidad de área inmediata inferior, y es 100 veces menor, que la unidad de área inmediata superior, tal como puedes observar en el diagrama que sigue.



Los criterios (1) y (2) son esenciales para convertir una unidad de área (o superficie) en otra.

Observa que el factor 100 aparece en "peldaños" consecutivos de este diagrama.

Así que, para convertir una unidad de área a otra, debes atender a los dos criterios que se exponen aquí: **(1) si la conversión es de una unidad mayor a una menor, entonces debes multiplicar por 100 por cada peldaño que debas desplazarte hasta llegar a la otra unidad.** (2) si la conversión es de una unidad menor a una unidad mayor, entonces debes dividir entre 100 por cada peldaño que debas desplazarte hasta llegar a la otra unidad.

Ejemplo: la superficie de Santo Domingo es de 2,770 km^2. ¿Cuál es su equivalente en m^2? Para responder esto, debes guiarte por el criterio (1), ya que la conversión es de una unidad de área mayor a una menor.

Además, como debes "desplazarte" 3 peldaños en el diagrama, entonces 2,770 debe multiplicarse por 100·100·100.

$$2{,}770 \text{ km}^2 = 2{,}770 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \text{ m}^2$$

Y, haciendo los cálculos:

$$2{,}770 \text{ km}^2 = 2{,}770{,}000{,}000 \text{ m}^2$$

Es decir, 2,770 km^2 equivalen a: dos mil setecientos setenta mil millones de metros cuadrados. Como es un número con muchos dígitos, es común expresar el área de ciudades en km^2.

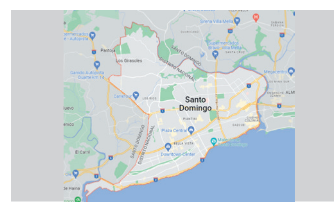
Para convertir 1 cm^2 en m^2, se procede como sigue: se divide 1 entre 100 · 100, ya que debes "desplazarte" dos "peldaños" desde el que corresponde a cm^2 hasta el que corresponde a m^2. Así, puedes escribir:

$$1\ cm^2 = \frac{1}{100 \cdot 100}\ m^2$$
$$= \frac{1}{10{,}000}\ m^2$$
$$= 0.0001\ m^2$$

Relación de las unidades mayores y menores con respecto al m^2

En la tabla que se muestra a continuación se expresa la equivalencia de tres de las unidades de área menores y mayores con respecto al m^2. Su construcción se apoyó en los criterios (1) y (2) antes descritos.

Unidad de área	Notación	Equivalencias
Kilómetro cuadrado	km^2	$1\ km^2 = 1{,}000{,}000\ m^2$
hectómetro cuadrado	hm^2	$1\ hm^2 = 10{,}000\ m^2$
decámetro cuadrado	dam^2	$1\ dam^2 = 100\ m^2$
metro cuadrado	m^2	$1\ m^2$
decímetro cuadrado	dm^2	$1\ dm^2 = 0.01\ m^2$
centímetro cuadrado	cm^2	$1\ cm^2 = 0.0001\ m^2$
milímetro cuadrado	mm^2	$1 mm^2 = 0.000001\ m^2$

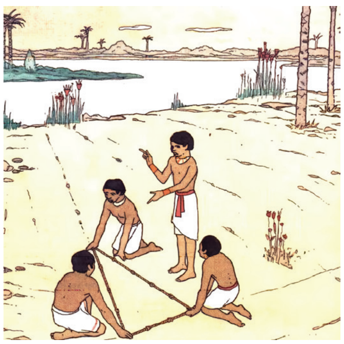


Mapa de la ciudad de Santo Domingo, capital de la República Dominicana.

- **Comprueba** cada una de las equivalencias dadas en la Taba anterior.
- ¿Cuál es la superficie de la ciudad de Santo Domingo expresada en hectómetros cuadrados?
- Si un cable conductor de electricidad tiene una superficie de 2 mm^2, ¿cuál es su equivalente en cm^2?

- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en las que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre el área.

Uno de los orígenes del concepto de área se encuentra en la antigüedad. Por ejemplo, en Egipto, ante el problema que representaban las periódicas crecidas del río Nilo, surgió la necesidad de calcular el área de las parcelas dedicadas a la agricultura.



Fuente: matematicasentumundo.es

La fórmula del cuadrado es, en realidad, evidente: si para la longitud *l*, construimos un cuadrado de lado *l*, entonces ese cuadrado abarcará una superficie identificada con el número $\ell \cdot \ell = \ell^2$.

Algo similar sucede con la fórmula del área del *rectángulo*.

Existe otra fórmula, equivalente a $A_{\square} = l^2$, para calcular el área de un cuadrado:

$$A_{\square} = \frac{d^2}{2}$$

Si conoces la longitud de la diagonal (*d*) de un cuadrado, basta con multiplicar un medio por la diagonal elevada al cuadrado.

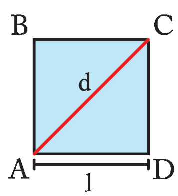
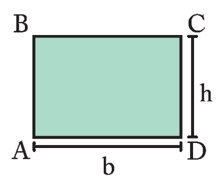
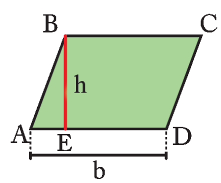
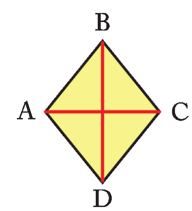
Área de cuadriláteros y triángulos

¿Cuál es la definición de cuadrado, rectángulo, romboide, rombo, trapecio y triángulo?

Hay figuras poligonales básicas, como el cuadrado, el rectángulo, el romboide, el rombo, el trapecio y el triángulo, con los que pueden abordarse problemas de nuestro entorno relacionados con el cálculo del **área**. En esta lección estudiarás el área de estas figuras básicas.

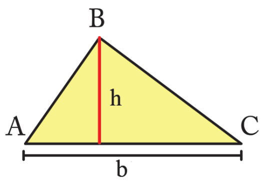
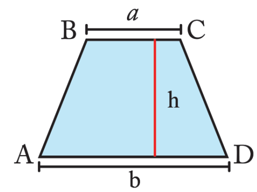
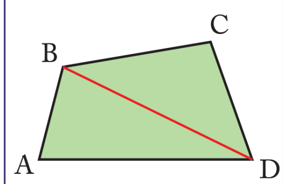
En lo que sigue, se organizarán estos polígonos en paralelogramos, triángulos, trapecios y trapezoides.

Área de paralelogramos

Cuadrado	Rectángulo	Romboide	Rombo
			
$A_{\square} = \ell^2$	$A_{\square} = b \cdot h$	$A_{▱} = b \cdot h$	$A_{\lozenge} = \frac{AC \cdot BD}{2}$
El área del *cuadrado* es igual a la longitud de su lado (ℓ) elevado al cuadrado.	El área del *rectángulo* es igual al producto de las longitudes de su base (b) y de su altura (h).	El área del *romboide* es igual al producto de la longitud de su base (b) y de su altura (h).	El área del *rombo* es igual al producto de las longitudes de sus diagonales (AC y BD) *dividido entre 2.*

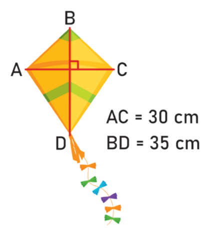
Observa que la fórmula para describir el área del cuadrado, del rectángulo y del romboide, es la misma. En el caso del cuadrado, como la longitud de su base es igual a la longitud de su altura, se simplificó la notación, y a ambas se etiquetó con la letra ℓ. Observa, además, que, en el caso del rombo, para hallar su área es suficiente conocer la longitud de sus dos diagonales: AC y BD.

Área de triángulos, trapecios y trapezoides

Triángulos	Trapecios	Trapezoides
		
$A_{\Delta}=\frac{b\cdot h}{2}$	$A_{⏢}=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$	$A_{⏢}=A_{\Delta ABD}+A_{\Delta BCD}$
El área de un *triángulo* es igual a un medio del producto de la longitud de su base (b) por la longitud de su altura (h)	El área de un *trapecio* es igual a un medio del producto de la longitud de su altura (h) por la suma de la longitud de sus bases (a+b)	El área de un *trapezoide* es la suma del área de los triángulos que lo conforman.

Las fórmulas que describen el área de triángulos, cuadriláteros son importantes en la agrimensura, la topografía, la construcción, el diseño, la confección, y en una larga lista de disciplinas sociales, artísticas, tecnológicas y científicas.

Ejemplo 1: Una chichigua, con la forma que se expone, tiene diagonales con longitudes de 30 *cm* y 35 *cm*. ¿Cuál es su área? Para ello, puedes escribir:

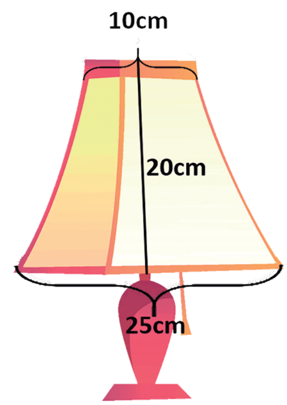


$$A\diamond = \frac{30\ cm\cdot 35\ cm}{2} = \frac{1{,}050\ cm^2}{2} = 525\ cm^2$$

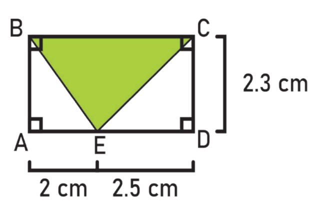
Ejemplo 2: Una de las caras de una lámpara tiene forma de trapecio (observa la imagen al margen). Sus bases miden 25 cm y 10 cm, y la altura de este trapecio es de 20 cm. ¿Cuál es su área? En este caso puedes escribir:

$$A_{⏢} = \frac{(25\,\text{cm}+10\text{cm})\cdot 20\text{ cm}}{2} = \frac{35\text{cm}\cdot 20\text{cm}}{2} = 350\text{cm}^2$$

Ésta es la figura que corresponde al Ejemplo 2.



- ¿Cuál es el área de tu salón de clases?
- **Calcula** el área de una página de tu libreta
- ¿Cuál es el área del ΔBEC?
- **Conversa** con tus compañeros y docente sobre tu estrategia para resolver el problema anterior. ¿Cómo puedes mejorar tu estrategia?



- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Arquímedes es uno de los matemáticos más destacados en toda la historia.

Imagen: Pintura al óleo del artista Domenico Fetti, titulada: Retrato de un erudito (¿Arquímedes?).

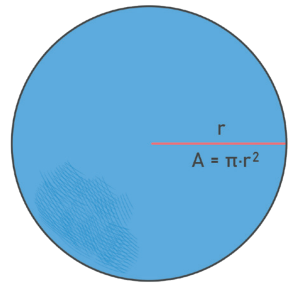
Fuente: Wikipedia.org

Área de círculos

> ¿Cuál es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro?

Reflexiona sobre la idea de Arquímedes

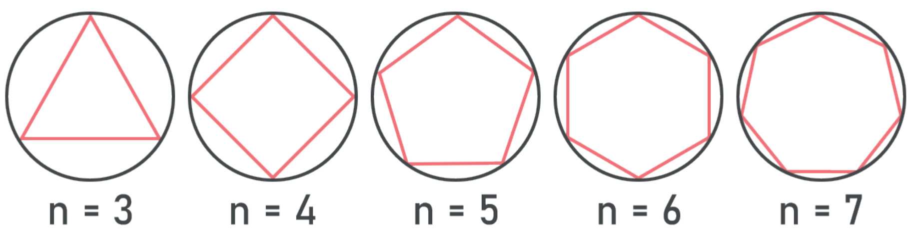
Tal como la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, que, como estudiaste en 5to grado, es igual al número π, existe también una relación especial con respecto al área de un círculo. De hecho, se sabe que:



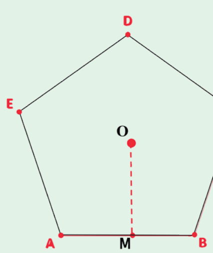
$$A_{\circ} = \pi r^2$$

Es decir, el área de un círculo es igual a π multiplicado por el cuadrado del radio.

Una idea extraordinaria que permitió llegar a esta fórmula se debe a *Arquímedes*. Este matemático griego, hace más de 2,000 años, inscribió polígonos regulares en una circunferencia, tal como se muestra en la figura que sigue.



La apotema de un polígono regular es la menor distancia entre el centro y cualquiera de sus lados. Es decir, es la medida del segmento cuyos extremos son el centro del polígono regular y el punto medio de uno de sus lados.



En el pentágono regular de la figura, la apotema es la medida OM.

Observa que solo los vértices, estos polígonos tocan a la circunferencia.

Su intención fue que: al incrementar el número de lados del polígono inscrito, su área se aproxime cada vez más al área del círculo.

Para entonces ya se conocía que el área de un polígono regular es:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2}$$

Donde P es el **perímetro** del polígono regular, y ap es su **apotema**.

Arquímedes razonó ahora como sigue: si el número de lados del polígono regular inscrito es infinito, entonces el perímetro *P* va a ser igual a la longitud de la circunferencia (*C*), y la apotema *ap* será igual a *r*.

Entonces, la fórmula anterior se transforma en:

$$A = \frac{C \cdot r}{2}$$

Y como $C = 2r\pi$, entonces

$$A_\circ = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Rueda del Milenio, Londres, Inglaterra. Fuente: Pexels.

Calcula el área del círculo de lanzamiento

El círculo de lanzamiento en un estadio de béisbol tiene una medida estándar. En el caso de las competencias profesionales, éste tiene un diámetro de 5.47 *m*. ¿Cuál es su área?

Para calcular su área, puedes escribir:

$$A_\circ = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5.47}{2}\,\text{m}\right)^2. \text{ Y como } \frac{5.47}{2}\,\text{m} = 2.735\text{m. Entonces:}$$

$$A_\circ \approx (3.14)\ (2.735\ \text{m})^2 \approx 23.49\ \text{m}^2$$

Observa que se utilizó el símbolo ≈ (que se lee "es aproximado a"), ya que en los cálculos se tomaron solo dos cifras decimales del número π.

Para estos cálculos te puedes apoyar en la calculadora disponible en: https://www.geogebra.org/calculator

- **Investiga** cuál es el diámetro del círculo de lanzamiento en un campo de béisbol en la categoría infantil, y calcula el área de este círculo.
- ¿Cuál es el área de la moneda de 5 pesos acuñada en ocasión del 50º aniversario del Banco Central de la República Dominicana?

- Emplea con precisión herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

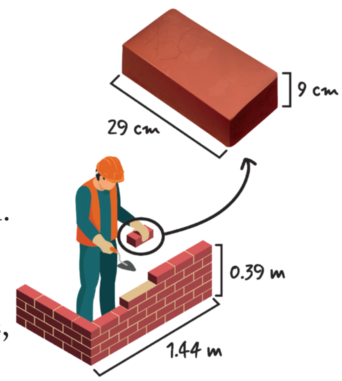
Estimación de Áreas

¿Qué significa estimar?

Para el cálculo 1.44 m · 0.39 m puedes utilizar la calculadora.

Resuelve problemas relacionados con el área

Ejemplo 1: el concepto de área tiene múltiples aplicaciones en problemas del contexto. Uno de ellos es el que sigue.



Se necesita construir un muro de 1.44 m de largo por 0.39 m de altura. Cada ladrillo tiene un largo de 29 cm y una altura de 9 cm. (a) ¿Cuál es área del muro? y (b) ¿cuántos ladrillos son necesarios para construirlo? Para responder la primera de estas preguntas, debes observar que el muro a construir tiene forma rectangular, por tanto, su área es $A_{muro} = b \cdot h$. Entonces:

El cociente $\frac{0.5616}{0.0261}$, puedes obtenerlo con apoyo en la calculadora.

$$A_{muro} = 1.44 \text{ m} \cdot 0.39 \text{ m} = 0.5616 \text{ m}^2$$

Y esto responde la pregunta (a). Para responder la pregunta planteada en (b) puedes dividir el área del muro entre el área de la cara expuesta del ladrillo (que mide 29 cm de largo y 9 cm de alto).

Calcula primero el área de la cara expuesta del ladrillo:

$$A_{\text{cara expuesta del ladrillo}} = 29 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 261 \text{ cm}^2$$

Pero debes tener el cuidado de convertir de cm^2 a m^2, así:

$$261 \text{ cm}^2 = \frac{261}{100 \cdot 100} \text{m}^2 = \frac{261}{10{,}000} \text{m}^2 = 0.0261\, m^2$$

Y, finalmente, divides el área del muro entre el área de la cara expuesta del ladrillo:

$$\frac{0.5616 \text{ m}^2}{0.0261 \text{ m}^2} \cdot 21.52 \approx 22$$

Es decir, se necesitan aproximadamente 22 ladrillos.

Ejemplo 2: un problema bastante común es el de la estimación de la cantidad de baldosas necesarias para cubrir cierta superficie. Supongamos que se utilizarán baldosas de 25 cm × 25 cm para embaldosar una superficie rectangular de 2 m × 1.5 m.

¿Cuántas baldosas son necesarias para ello?

Una manera de responder esto consiste en:

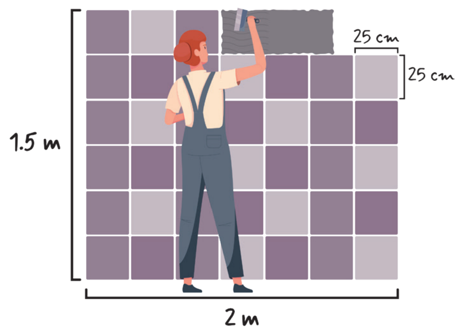
(a) calcular el área de la superficie a embaldosar:

A = 2 m · 1.5 m =3 m^2

(b) calcular el área de cada baldosa:

A_{baldosa} = 25 cm · 25 cm = 625 cm^2

(c) convertir esta cifra en m^2, así:



$$625\,\text{cm}^2 = \frac{625}{100 \cdot 100}\,\text{m}^2 = \frac{625}{10{,}000}\,\text{m}^2 = 0.0625\ \text{m}^2$$

Observa que se dividió 625 entre 100·100, ya que para convertir de cm^2 a m^2 implica desplazarse dos "peldaños" en la escala que estudiaste en la Lección 2.

Es decir, una baldosa tiene un área de 0.0625 m^2.

(d) Y, finalmente, divides el área de la superficie a embaldosar entre el área de una baldosa. Ello dará como resultado el número de baldosas necesarias:

$$\frac{3\ \text{m}^2}{0.0625\ \text{m}^2} = 48$$

Con este tipo de estimaciones pueden planificarse, con precisión, la cantidad de materiales necesarios, así como el costo de un proyecto de esta naturaleza.

Para obtener el cociente $\frac{625}{10{,}000}$, simplemente desplazas el punto decimal cuatro lugares hacia la izquierda.

- Si el área de una baldosa rectangular es de 400 cm^2, **da** ejemplos de las posibles longitudes de su base y de su altura.
- **Discute** tus ideas y respuestas con tu docente y compañeros.
- ¿Cuántas respuestas válidas puede haber para la pregunta planteada en la parte (a)?
- ¿Cuál es el área de una baldosa triangular cuyos lados miden 16 cm, 21 cm y 27 cm?

- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Actividad grupal

Área de superficies irregulares

Puedes, también, seleccionar dos ciudades y ubicarlas en el mapa. Para ello puedes consultar un mapa político y compararlo con el que reprodujiste en tu cuaderno.

Y, finalmente, estimar la distancia entre esas dos ciudades.

¿Qué haremos?

Con base en un mapa de la República Dominicana estimarán grandes distancias.

¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra, compás, lápiz, lápices de colores y papel.

¿Cómo nos organizamos?

Trabaja en parejas y expresa tus ideas sobre cada una de las actividades y preguntas planteadas.

¿Cómo lo haremos?

En este mapa de la **República Dominicana** se indica, abajo a la derecha, una **escala**. Esta escala expresa una correspondencia entre la distancia dada en el mapa con la distancia real sobre la superficie terrestre. En otras palabras, una escala funciona como una especie de regla de medición.

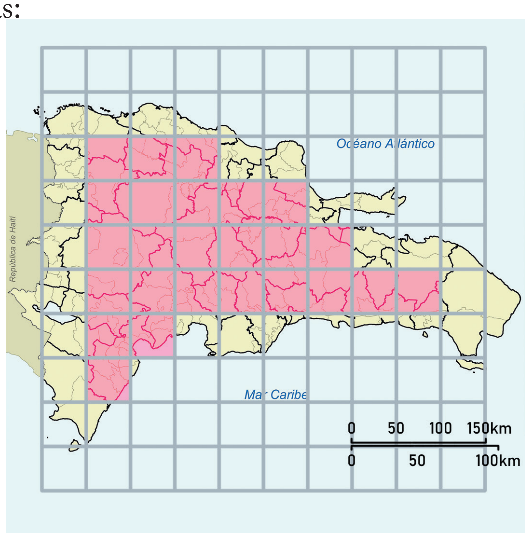
Ya con estas ideas, están en condiciones de realizar las actividades que se describen a continuación.

En primer lugar, reproduzcan el mapa dado en sus libretas.

Puedes consultar otros mapas de la República Dominicana en la página del Instituto Geográfico Nacional "José Joaquín Hungría Morell"

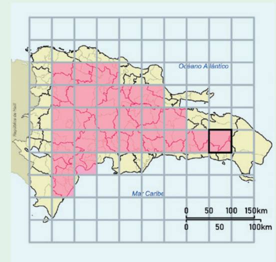
https://ign.gob.do/

- Cuadriculen el mapa. Un ejemplo de ello se muestra de seguidas:



En este ejemplo puedes observar que: la región destacada en color verde tiene un área aproximada de (50 *km*)·(50 *km*)=2,500 km^2.

Éste es un ejemplo del uso de la escala para estimar superficies en un mapa.



- Calculen el área (en km^2) de cada cuadrado que se genera. Tengan presente que basta con hacer un único cálculo, ya que todos estos cuadrados son congruentes.
- Estimen el área (en km^2) del territorio terrestre de la República Dominicana.
- Construyan ahora una cuadrícula más fina, y estimen nuevamente el área del territorio terrestre de la República Dominicana.
- Conviertan ambos resultados en mi^2.

Presentación y socialización de las actividades

Ya con todas las estimaciones, uno de los miembros de cada equipo comunicará sus resultados a los demás compañeros y a su docente.

Coevaluación

Los demás compañeros, junto a su docente, realizarán observaciones y sugerencias sobre el proceso y las estimaciones; valorando en todo momento los aportes de todos.

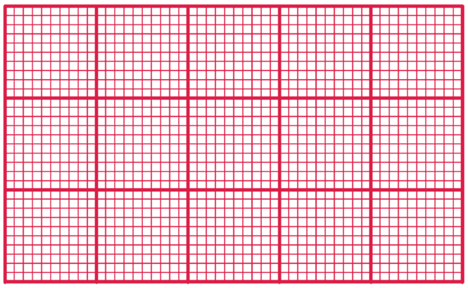
Autoevaluación

¿Qué aprendieron en esta actividad? ¿Qué pueden mejorar? ¿Cómo pueden ser más precisos en las estimaciones?

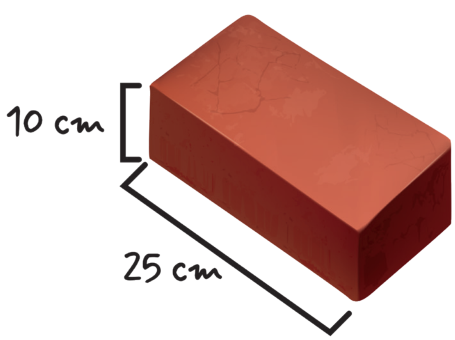
- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del Sistema Internacional (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el Sistema Inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos.

Evaluación

- ¿Cuál es la definición de *área*?
- Utiliza papel milimetrado para representar en este: 9 mm^2, 11 cm^2, y 2 dm^2.



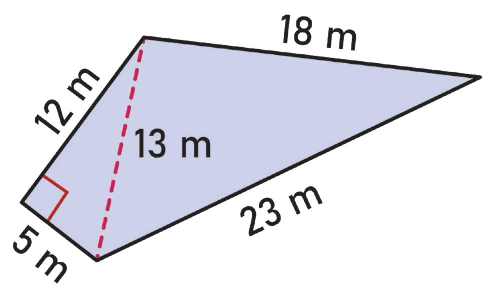
- ¿Cuál es la unidad de medida (en el *Sistema Internacional*) más adecuada para medir el área en cada uno de los casos que siguen?
  - Una pieza de tela
  - Una baldosa
  - Una cancha de voleibol
  - Un muro
- Da ejemplos de situaciones que puedan describirse a través mm^2.
- ¿Cuál es el área de la puerta de tu salón de clases?
- Un ladrillo tiene las medidas que se indican en la figura.



¿Cuál es el área de esa cara?

- Un tablero de ajedrez tiene escaques cuyos lados miden 5 cm. ¿Cuál es el área de todo el tablero?

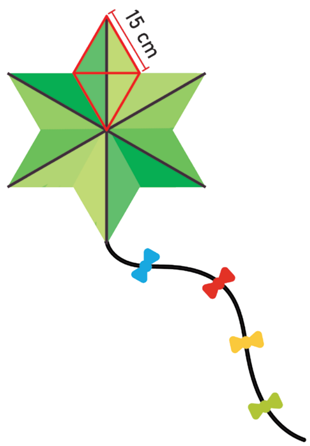
- Investiga cuáles son los principales lagos de la *República Dominica* y describe su superficie.
- Un conuco tiene forma de trapezoide, con las medidas que se indican en la figura.



¿Cuál es su área?

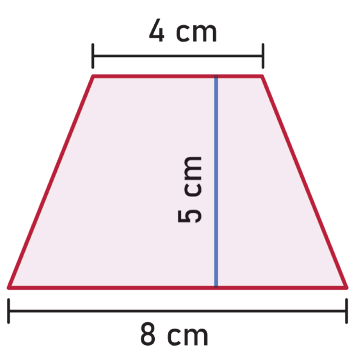
- ¿Cuál es la superficie de tu provincia (expresada en kilómetros cuadrados)?
- Si un cable conductor de electricidad tiene una superficie de 3 mm^2, ¿cuál es su equivalente en cm^2?

- Una chichigua tiene la forma que se muestra de seguidas. Observa que está formada por triángulos equiláteros congruentes. Y el lado de cada uno de estos triángulos mide 15 cm.

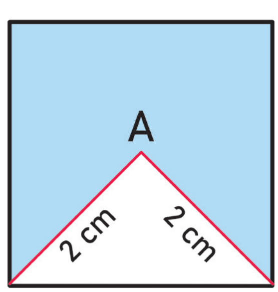


¿Cuál es el área de toda la chichigua?

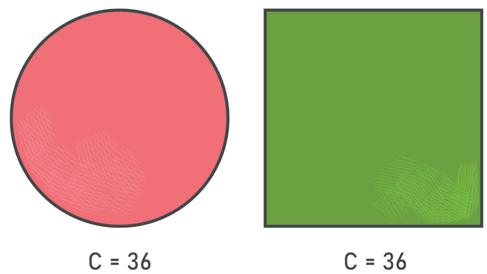
- ¿Cuál es el área del trapecio que se muestra a continuación?



- En el cuadrado que sigue: A es el punto en el que se intersecan sus diagonales. ¿Cuál es el área de la región sombreada en azul?

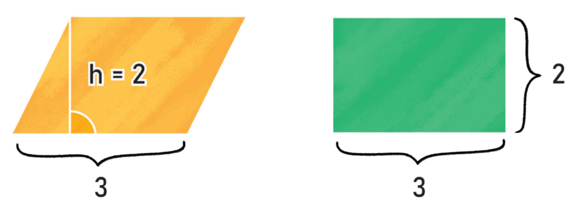


- Representa polígonos cuyo perímetro sea 10 cm. ¿Cuál de los que has representado tiene mayor área?
- Dibuja rectángulos de perímetro 20 cm. ¿Cuál de éstos tiene mayor área?
- ¿Cuál es el área de un círculo de radio 0.5 cm?
- Las figuras que siguen tienen el mismo perímetro:

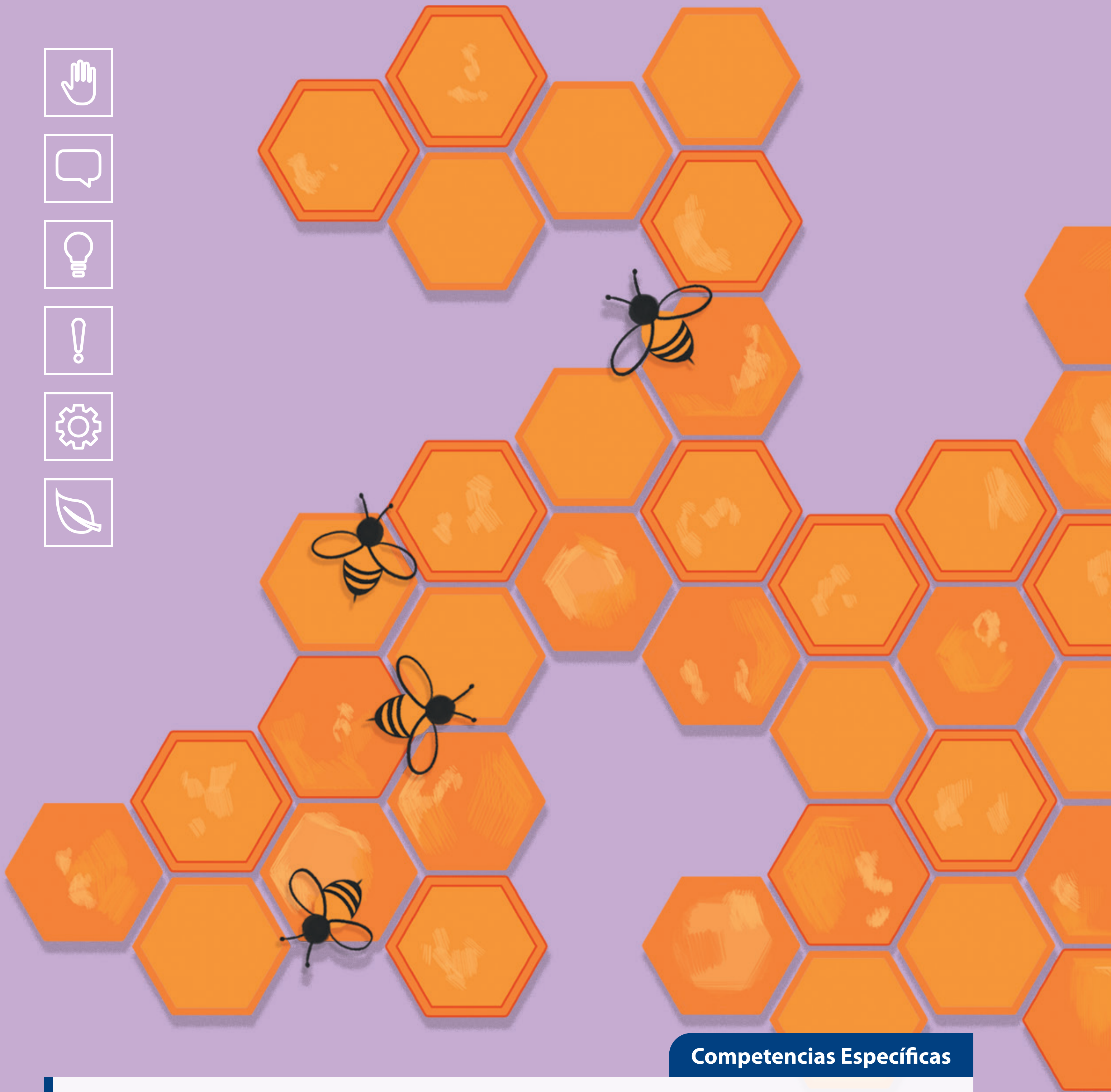


¿Cuál es el área de cada una? Discute tu método y resultados con tu docente y compañeros.

- ¿Cuál es el área de los cuadriláteros que siguen?

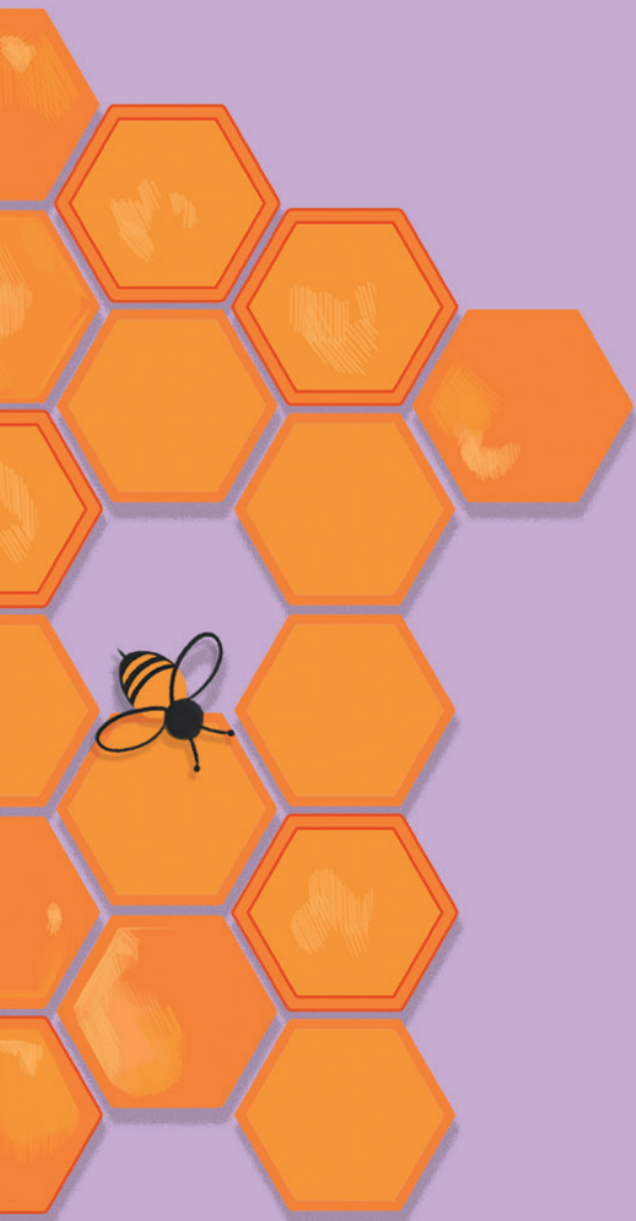


- ¿Qué aprendiste? ¿Qué aspectos puedes mejorar? ¿Cómo puedes hacerlo?



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 8

Los prismas

Situación de aprendizaje

Situación de aprendizaje: la Geometría se manifiesta de múltiples maneras, no solo en la naturaleza, sino también en el mundo de la Arquitectura, la Biología, el Arte, la Física, la Cristalografía y en muchas otras disciplinas. Por ejemplo, las celdas de un panal de abejas tienen una forma especial.

¿Cuál polígono representa la entrada de estas celdas?

¿Cuál es el nombre del cuerpo geométrico que representa a toda la celda?

¿Qué otros objetos de tu entorno tienen esa forma?

Contenido

- Los prismas en la naturaleza
- Clasificación de los prismas
- Desarrollo plano de un prisma
- Desarrollo plano de un prisma con regla y compás
- Área de la superficie de un prisma
- Actividad grupal
- Evaluaciones

Prismas en la naturaleza

Prisma: Es un tipo especial de poliedro en el que dos de sus caras son congruentes y paralelas (llamadas bases) y las demás caras (llamadas laterales) son paralelogramos.

¿Qué ejemplos de poliedros puedes dar?

La República Dominicana tiene un potencial enorme en cuanto a la producción de sal, así como de muchos otros minerales.

Recuerda que un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por un número finito de superficies planas y poligonales.

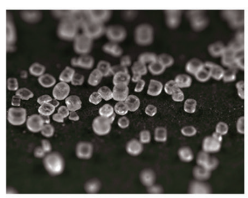
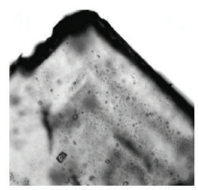
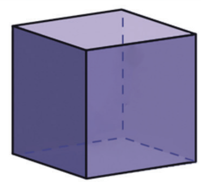
Las superficies que delimitan un poliedro se denominan "caras del poliedro" o simplemente "caras".

Observa el ejemplo de un prisma en la naturaleza

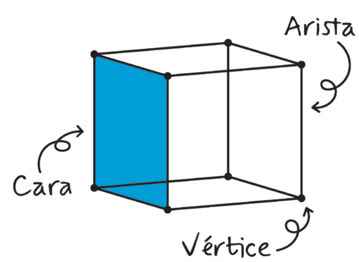
Son muchos los ejemplos de minerales que de manera natural se cristalizan o se fracturan con formas de **poliedros**, y en especial con la forma de **prisma**. Uno de ellos es la Sal común .

Este mineral llamado también "cloruro de sodio" puede ser de procedencia marina, de manantial, de mina, o vegetal.

Su estructura, tanto si la vemos a partir de una foto ampliada, desde un microscopio, o desde la manera en la que interactúan sus átomos, se identifica con un **cubo**.

Cristales de Sal	Al microscopio	Prisma
		
Vistos a partir de una foto ampliada (Fuente: Wikipedia.org).	Vistos con un microscopio de alta resolución (Fuente: ABC Ciencia).	Cubo: cuerpo geométrico que se identifica con la Sal común.

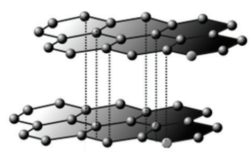
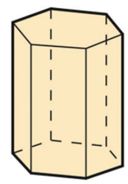
Observa que el cubo cumple con todas las características de un prisma. En efecto: es un poliedro en el que dos de sus caras (las bases) son congruentes y paralelas y, las demás caras (las laterales) son paralelogramos.



Recuerda que: (a) una cara es uno de los polígonos que forman o que limitan un poliedro. (b) una arista es el segmento de recta que limita una cara. Y (c) un vértice es un punto extremo de una arista.

En este caso, el cubo tiene la peculiaridad de que cualesquiera caras opuestas son bases de éste (ya que en un cubo todas sus caras opuestas son congruentes y paralelas). Por tanto, en un cubo hay 3 pares de caras que se comportan como bases.

El grafito, un mineral muy utilizado en la elaboración de las minas de los lápices, en la construcción de piezas automotrices, en conductores de electricidad, e incluso, de ladrillos especiales que soportan altas temperaturas. Su estructura es la de un *prisma hexagonal*.

Grafito	Estructura	Prisma
		
Visto de la ampliación de una fotografía	Los cristales de grafito tienen esta estructura (Fuente: Wikipedia.org).	Prisma hexagonal: cuerpo de base hexagonal.

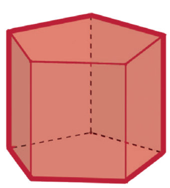
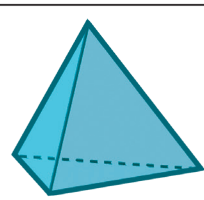
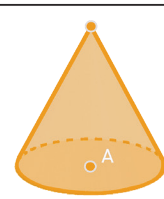
Piedras talladas como las que se muestran, se han encontrado en lo que actualmente es Escocia, Gran Bretaña e Irlanda. Y datan de unos 4,000 a 6,000 años antes de Cristo. En este caso estas piedras se corresponden con los 5 poliedros platónicos (llamados sólidos platónicos):
(a) Tetraedro, (b) Cubo, (c) Octaedro, (d) Dodecaedro y (e) Icosaedro.

Imagen: https://www.unirioja.es/

Los cuales pueden representarse como sigue:

Distingue los prismas de otros poliedros

En la tabla que sigue observarás las diferencias entre tres tipos de cuerpos geométricos: un prisma, un poliedro (que no es un prisma) y un cuerpo no poliédrico.

		
Prisma pentagonal	Tetraedro	Cono
Observa que tiene dos caras congruentes y paralelas. Es un prisma.	No tiene caras paralelas. Es un poliedro pero no es un prisma.	Observa que la superficie lateral es curva, por tanto, no es un poliedro.

- **Haz** una lista con los objetos de tu entorno que tengan forma de prisma.
  - **Identifica** en ellos sus caras, aristas, vértices.
  - Da un ejemplo de un objeto de tu entorno que tenga forma de poliedro pero que no sea un prisma.

- Comunica de manera coherente ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

Clasificación de los prismas

¿Recuerdas los criterios que se aplican para clasificar los polígonos?

Las torres inclinadas Kio (en Madrid) son un ejemplo arquitectónico de prisma oblicuo. En la imagen se muestra las torres.

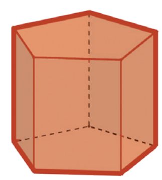
Fuente: Arquitectura y Diseño

Reflexiona sobre los elementos claves para reconocer prismas rectos y oblicuos

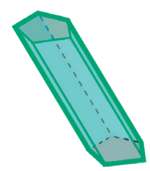
El nombre de los prismas depende de la forma de su base. **Por ejemplo**: (1) si la base del prisma es un cuadrado, el prisma se llama **cubo**, (2) si la base del prisma es un pentágono, entonces el prisma se llama **prisma pentagonal**, (3) si la base es un hexágono, su nombre es **prisma hexagonal**, etc.

Y pueden clasificarse observando si sus aristas laterales son perpendiculares o no a las bases.

Los **prismas rectos** verifican, además de las propiedades indicadas en la definición de prisma, que sus caras laterales son perpendiculares a las caras de la base.



Prisma recto

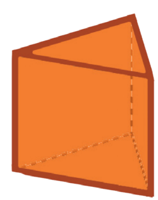


Prisma oblicuo

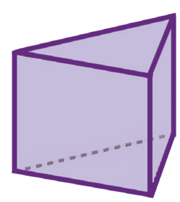
En caso contrario, es decir, si las caras laterales no son perpendiculares a las caras de la base, entonces tal prisma se denomina **prisma oblicuo**. Esta distinción es importante.

Ahora bien, un prisma recto es regular si sus bases son polígonos regulares.

Y un prisma recto es irregular si sus bases son polígonos irregulares.



Prisma regular



Prisma irregular

Estos tipos de prismas son muy comunes en la arquitectura, así como en muchos aspectos de la vida cotidiana.

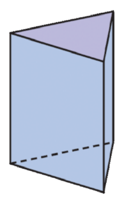
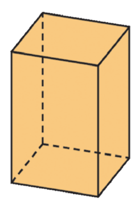
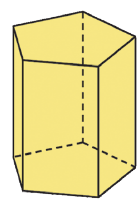
La edificación del Museo de Arte Moderno de la República Dominicana se basa en la composición de grandes prismas rectos de base rectangular, es decir, de paralelepípedos.

Comprueba el Teorema de Euler en el caso de algunos prismas

Existen poliedros en los que se cumple una propiedad muy interesante: si escogemos dos puntos cualesquiera de éste, entonces el segmento que va de un punto al otro está totalmente "dentro" del poliedro. Si un poliedro verifica esto, se le denomina **convexo**.

Los prismas son un ejemplo de poliedros convexos.

Considera ahora los poliedros que se muestran a continuación. En ellos contaremos el número de vértices, de aristas y de caras:

Representación gráfica			
Prisma / poliedro	Prisma triangular	Paralelepípedo	Prisma pentagonal
Número de vertices (V)	6	8	10
Número de caras (C)	5	6	7
Número de aristas (A)	9	12	15

Observa que en todos estos casos se cumple que:

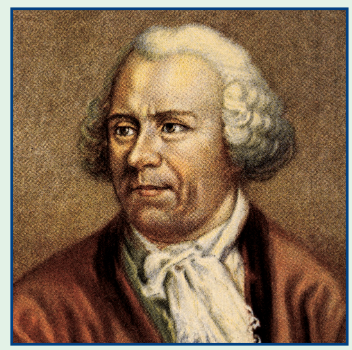
$V + C - A = 2$

En el caso del prisma triangular, por ejemplo, $6 + 5 - 9 = \mathbf{2}$. Y en los otros dos casos se tiene que: $8 + 6 - 12 = \mathbf{2}$ y $10 + 7 - 15 = \mathbf{2}$.

Esta propiedad se debe a Leonhard Euler , y es válida para cualquier poliedro que sea convexo.

- **Identifica** al menos dos prismas y poliedros de tu entorno y comprueba que se cumple la siguiente propiedad $V + C - A = 2$.
- **Identifica** otro poliedro no convexo y verifica si la propiedad anterior se cumple. Conversa sobre tus conclusiones con tu docente y compañeros.

Leonhard Euler (1707-1783) fue uno de los matemáticos más importantes de la historia. De hecho, realizó aportes en muchas áreas de las Matemáticas. Se estima que la totalidad de sus escritos podría abarcar alrededor de 80 tomos.
En su honor, un número lleva un nombre: número de Euler.



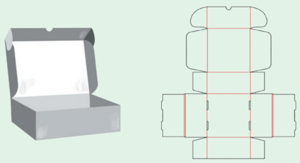
Fuente: Biography

- Aplica el razonamiento lógico para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana en las que se utilicen los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

Desarrollo plano de un prisma

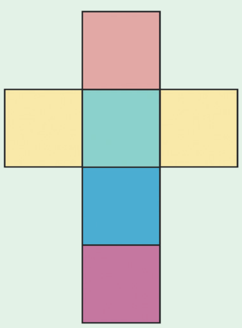
El diseño de plantillas para elaborar cajas se relaciona con el "desarrollo plano" de poliedros.

Un ejemplo de ello es el que sigue. Luego de los cortes y dobleces, con la plantilla de la derecha puede elaborarse la caja que está a la izquierda.



Recuerda que la traslación, la rotación y la simetría con respecto a un eje, son tres de las transformaciones geométricas que ya estudiaste en la Unidad 5.

Una visión cenital (o desde arriba) del desarrollo plano del cubo es:



Las plantillas para elaborar "cajitas" para jugos y algunas otras bebidas, son similares a ésta. Solo que, en vez de partir de un cubo, parten de un paralelepípedo. Solo resta colocar algunas "pestañas" para pegamento o para que encajen entre sí.

¿Cuáles son las transformaciones geométricas?

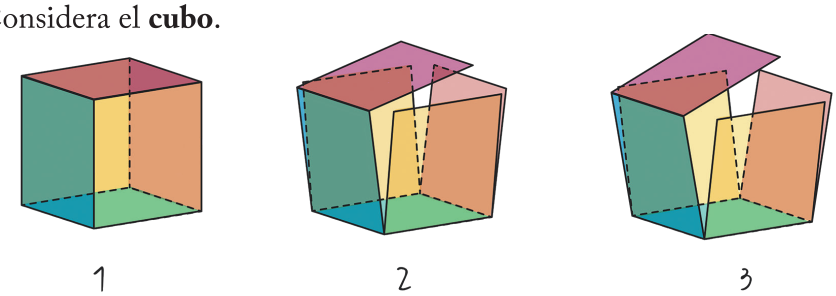
Observa el desarrollo plano del cubo

Los prismas y otros poliedros pueden representarse en un plano a través de un proceso que se denomina "desarrollo del poliedro"; éste consiste en un "desdoblamiento" de sus caras, con apoyo en ciertas *transformaciones geométricas*, y en ubicarlas en un mismo plano.

La figura plana que se obtiene es una especie de "plantilla" o "modelo" del poliedro.

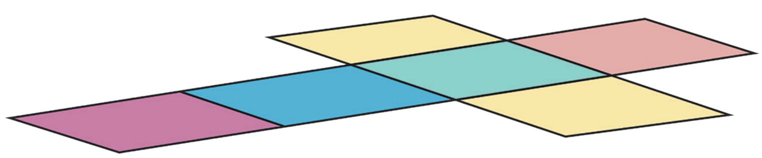
Observa este proceso en el ejemplo que sigue.

Considera el **cubo**.



Hemos coloreado sus caras para visualizar el efecto de las transformaciones geométricas sobre las caras del cubo. Las etapas (2) y (3) muestran cómo se desdoblan sus caras y se llevan al plano que contiene a su base de apoyo.

La figura final es la que sigue:



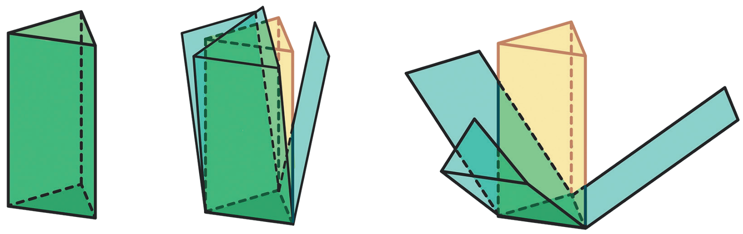
Este desarrollo conserva las distancias y áreas.

Observa el desarrollo plano del prisma triangular

En el caso del prisma triangular su desarrollo sigue las mismas etapas que describimos antes para el cubo.

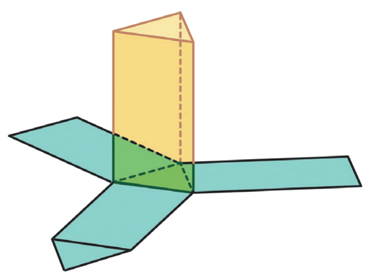
Para ello debes "desdoblar" sus caras, observa que la base superior quedará unida a una de las caras laterales.

Y luego, ubicarlas en el plano que contiene a la base inferior.



1 2 3

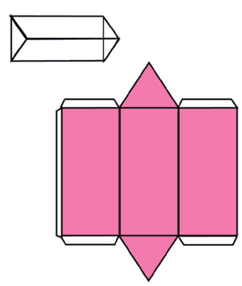
El desarrollo plano resultante es el que se muestra en la figura (4). Si a este desarrollo plano se aplican las inversas de estas transformaciones geométricas, entonces obtendrás el prisma inicial.



4

Como puedes observar, el conocimiento de los polígonos y los poliedros, permite construcciones maravillosas como estas.

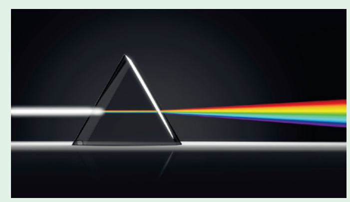
Observa otra forma de hacer el desarrollo plano de un prisma triangular:



- ¿Cuántos lados tiene el "desarrollo plano" del prisma triangular?
- ¿Cuántos vértices tiene?
- **Conversa** con tu docente y compañeros sobre el proceso que seguiste, así como del resultado obtenido. Valora sus ideas y busca soluciones a los problemas encontrados.

Desde la antigüedad, la humanidad ha tallado cuentas de vidrio para construir prismas que tenían la capacidad de refractar, reflejar y descomponer la luz del Sol en los colores del arcoíris.

En las imágenes que siguen puede ver este efecto.



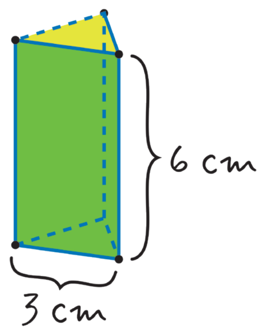
- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Desarrollo plano de un prisma con regla y compás

Para el desarrollo plano del prisma recto y regular, utilizando regla y compás, será necesario: (a) construir un triángulo equilátero, (b) trazar una perpendicular a una recta por un punto dado y (c) trasladar medidas con el compás.

¿Recuerdas las construcciones básicas con regla y compás?

Construye con regla y compás el desarrollo plano de un prisma

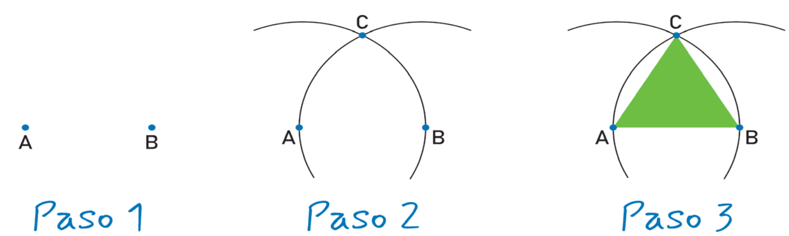


Considera, por ejemplo, un *prisma triangular* recto y regular, tal como el que se muestra en la imagen: en el que cada lado de la base mide 3 cm, y cada arista vertical de sus caras laterales mide 6 cm.

¿Cómo obtener su desarrollo plano con apoyo en la regla y el compás?

Una forma de hacer esto es la que sigue:

Etapa 1 : Representa la base del prisma. En este caso, como es un prisma triangular regular, su(s) base(s) es un triángulo equilátero.



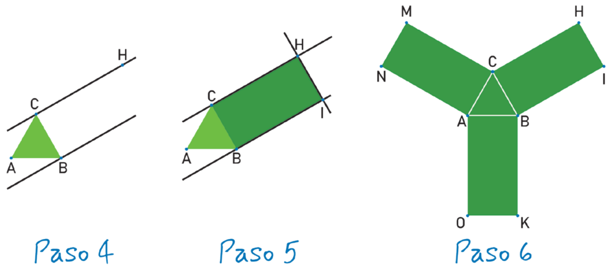
Observa que se han representado dos puntos A y B, donde AB = 3 cm (paso 1), luego con el compás traza un arco con centro en A y radio 3 cm, y traza otro arco, esta vez con centro en B y con el mismo radio.

Ambos arcos se cortan en el punto C (paso 2).

Y ya puedes trazar los segmentos que unen los puntos A, B y C.

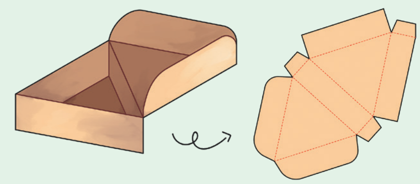
Entonces, el ΔABC es equilátero de lado 3 cm.

Etapa 2: ¿Qué falta por hacer? Precisamente representar las caras laterales del prisma sobre el plano que contiene al ΔABC y a la otra base (la base superior).



Los desarrollos planos de un prisma, y en general de un poliedro, son necesarios para el diseño de empaques adecuados.

Un ejemplo de empaque, que armado tiene la forma de prisma triangular, es el que sigue:

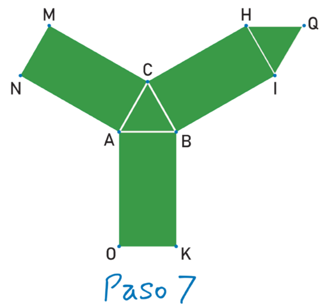


Para ello: traza la perpendicular a BC que pasa por C. Ubica el punto H, justo a 6 *cm* de C (observa el paso 4). Ubica también el punto I, a 6 *cm* de B (observa el paso 5).

Ahora, repite el procedimiento anterior para ubicar los puntos M, N, O y K (observa el paso 6).

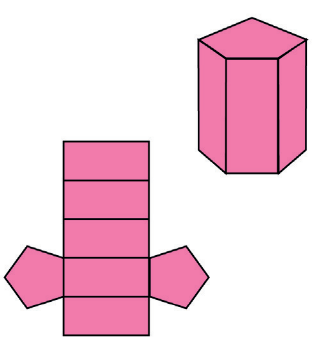
Finalmente, traza el triángulo equilátero ΔIHQ (paso 7).

Los segmentos AO, OK, KB, BI, IQ, QH , HC, CM, MN y NA determinan el desarrollo plano del prisma.



El polígono que se obtiene conserva las medidas tanto de las bases del prisma dado como de sus caras laterales.

- **Construye** el desarrollo plano de un cubo cuya arista mide 4 cm, utilizando regla y compás.
- **Constrúyelo** ahora con apoyo en Geogebra.



- Emplea con precisión herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

El Mausoleo de Gol Gumbaz (en la India) tiene forma de cubo, y sobre éste, una enorme cúpula (o sección esférica). Los prismas, y los poliedros en general, tienen presencia recurrente en la Arquitectura.

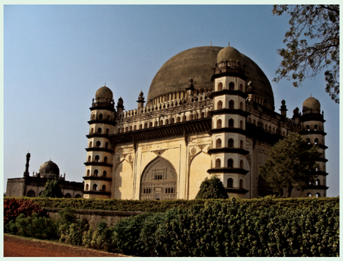
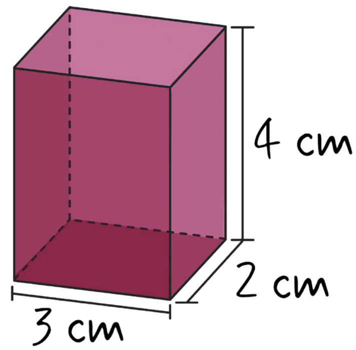


Imagen: ArteHistoria

Área de la superficie de un prisma

¿Cuál es el área de un paralelogramo?

Calcula el área de la superficie de un paralelepípedo



Bien sea en el mundo de la arquitectura, de la apicultura, del almacenamiento de granos o de otros productos en general, del empaquetado, o en el seno de las matemáticas en sí mismas, el cálculo del área de la superficie de un prisma es relevante.

Por ejemplo, supongamos que se necesita elaborar, con cartulina, el paralelepípedo que se muestra. ¿Cuánta cartulina es necesaria? Es decir, ¿cuál es el área de su superficie?

Para ello debes sumar el área de sus dos bases y el área de todas sus caras laterales. Observa que todas sus caras son paralelogramos (en este caso: rectángulos), y su área está dada por la fórmula:

$$A_{\square} = bh$$

Dos de las caras laterales tienen lados de 2 cm × 4 cm; con esto puedes calcular el área de cada una de ellas (que llamaremos “cara lateral 1”):

$$\text{A(cara lateral 1)} = 2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$$

Las otras caras laterales miden 3 cm × 4 cm. Entonces, el área de cada una de ellas (que llamaremos “cara lateral 2”) es:

$$\text{A(cara lateral 2)} = 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

Además, cada una de sus bases tiene por área:

$$\text{A(base)} = 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

Ya con estos datos es posible calcular el área total de la superficie del paralelepípedo:

dos caras de 3 cm×4 cm

$$\downarrow$$

$$A_{total} = \mathbf{2} \cdot 8\ cm^2 + 2 \cdot 12\ cm^2 + \mathbf{2} \cdot 6\ cm^2$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

dos caras de 2 cm × 4 cm dos bases

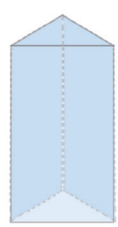
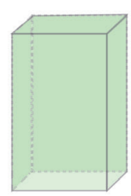
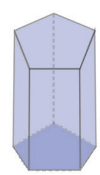
Es decir, el área total es dos veces el área de una de sus bases, más dos veces el área de una de sus caras laterales, más dos veces el área de la otra cara lateral. Por tanto:

$A_{total} = 12\ cm^2 + 16\ cm^2 + 24\ cm^2 = 52 cm^2$

Se necesitan 52 cm^2 de cartulina para construir este paralelepípedo.

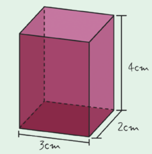
Observa los datos en el cuadro para calcular el área de algunos prismas

Aquí se muestran las partes del prisma triangular, para el paralelepípedo y para el prisma pentagonal regular.

		
Prisma Triangular	Paralelepípedo	Prisma Pentagonal
El **prisma triangular regular** es aquel que tiene como bases dos triangulos equilateros y sus caras laterales son rectangulos congruentes.	El **paralelepípedo** es un cuerpo geometrico formado por seis paralelogramos, de los cuales son congruentes y paralelos los opuestos entre sí.	El **prisma pentagonal regular,** tiene dos caras pentagonales y cinco caras rectangulares. a_p es la apotema de la base
Área $= 2 \cdot A_B + P_B \cdot h$ Área $= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ell^2 + 3 \cdot \ell \cdot h$	Área $= 2(ab + ac + bc)$	Área $= 2 \cdot A_B + P_B \cdot h$ Área $= 2 \cdot \frac{P \cdot a_p}{2} + 5 \cdot \ell \cdot h$

- Con la asesoría de tu docente, **selecciona** un prisma que se encuentre en tu entorno, y calcula el área total de su superficie. Conversa sobre el proceso seguido con tus compañeros y valora otras soluciones.

Si aplicas la fórmula $A_{total} = 2(a + b)h + 2ab$ en el caso del ejemplo:



Donde a y b son las medidas de los lados de la base, y h es la altura del prisma.
Tendrías que:

$$\begin{aligned} A_{total} &= 2(3 + 2)4 + 2(3\cdot2) \\ &= 2(5)4 + 2(6) \\ &= 40 + 12 \\ &= 52 \end{aligned}$$

Justo el mismo resultado que en el ejemplo.

Para el desarrollo plano del prisma recto y regular, utilizando regla y compás, será necesario: (a) construir un triángulo equilátero, (b) trazar una perpendicular a una recta por un punto dado y (c) trasladar medidas con el compás.

- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Actividad grupal

Construcción de prismas en papel

¿Qué haremos?

Con base en plantillas o desarrollos planos de dos prismas, elaborarás dos modelos en papel de cartulina.

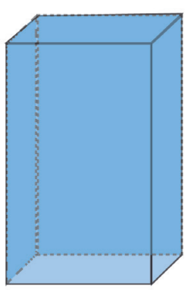
¿Qué necesitamos?

Regla, escuadra, compás, transportador, papel de cartulina, pegamento y tijera.

¿Cómo nos organizamos?

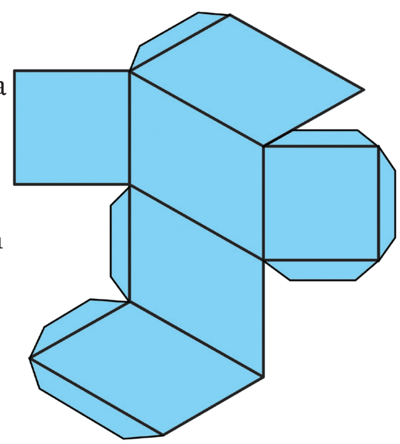
Trabaja en parejas, expresa tus ideas sobre cada una de las preguntas planteadas y colabora con tu compañero.

El prisma ya armado tendrá la forma que sigue.



¿Cómo lo haremos?

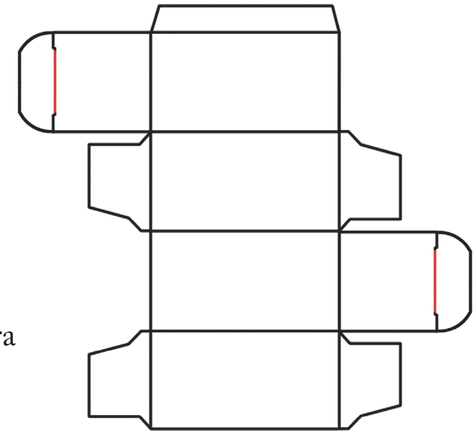
Actividad 1:



- Reproduzcan en una hoja de papel (o en cartulina), la plantilla que se adjunta a la derecha, conserven sus medidas, tanto de cada una de las aristas como de los ángulos. Para ello necesitarán apoyarse en la regla, la escuadra, el transportador y en el compás.
- Luego, recorten la plantilla y armen el prisma (observen que se han dejado "pestañas" para facilitar este proceso).
- Ahora respondan a las siguientes preguntas. Justifiquen cada una de sus respuestas:

¿Qué tipo de prisma es?, ¿cuál es el área de sus bases? y ¿cuál es el área total de su superficie?

Actividad 2:

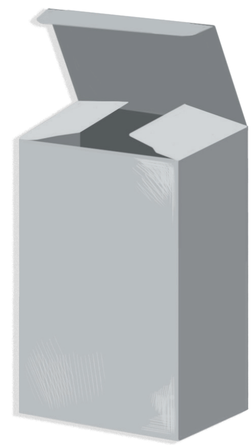


- Ahora repitan el procedimiento sugerido en la actividad 1, pero tomando en cuenta el modelo de la plantilla que se adjunta en este espacio. Observen que en este caso también se han dejado las pestañas, tanto para el pegamento como para la tapa.
- Ahora respondan a las siguientes preguntas. Justifiquen cada una de sus respuestas:

  ¿Qué tipo de prisma es?

  ¿Cuál es su área total?

El prisma ya armado tendrá la forma que sigue.



Presentación y socialización de las actividades

Ya construidos los prismas, uno de los miembros de cada equipo comunicará sus resultados a los demás compañeros de clase, a través de una actividad que organizará su docente.

Coevaluación

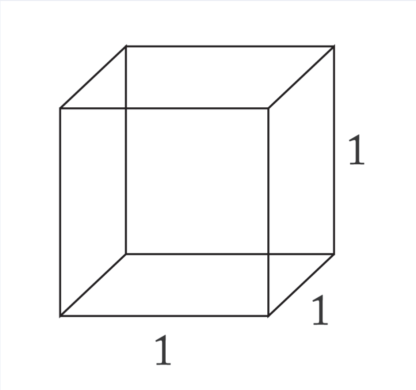
Los demás compañeros, junto a su docente, realizarán observaciones y sugerencias sobre los resultados de esta actividad; valorando en todo momento los aportes de todos.

Autoevaluación

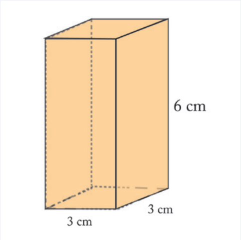
¿Qué aprendiste en esta actividad? ¿Qué puede s mejorar?

- Formula y resuelve de manera correcta problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

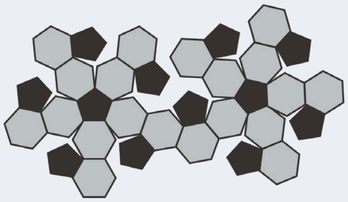
- Da ejemplos de objetos de tu entorno que tengan forma de prisma, o bien, que estén compuestos por prismas.
- Dado un prisma, ¿Qué formas geométricas podrían tener sus caras laterales?
- ¿Es posible que todas las caras de un prisma sean triángulos?
- ¿Es posible que la base inferior de un prisma no sea congruente a su base superior? Explica ¿por qué?.
- ¿Es posible que las bases de un prisma no sean paralelas?
- ¿Cuál es el área de la superficie de un cubo cuya arista mide 1 *cm*? ¿Puedes efectuar este cálculo sin necesidad de utilizar lápiz y papel?



- Construye con regla y compás el desarrollo plano de un prisma recto cuya base es un cuadrado de lado 3 cm, y sus caras laterales tienen aristas con medidas 3 cm y 4 cm.



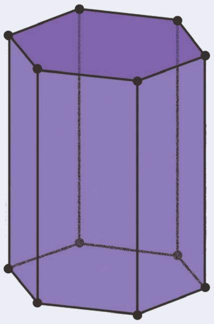
- Muchos balones de futbol se construyen partiendo de un desarrollo plano como el que sigue:



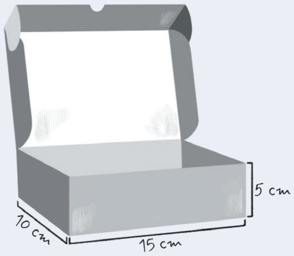
Al armarlo, se forma un poliedro conocido como icosaedro truncado.

¿De qué figuras consta? ¿Cuántas figuras tiene de cada tipo?

- Construye, también con regla y compás, un prisma de base hexagonal regular (en la que la arista de su base mide 2 cm). Y su altura mide 5 cm.

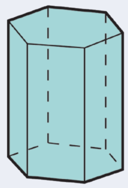
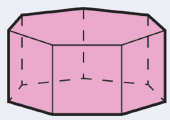


- ¿Cuál es la cantidad mínima de tela que se requiere para tapizar una banqueta con forma de prisma rectangular, cuya base mide 30 cm × 30 cm?
- Un cubo tiene como área en una de sus caras: 100 cm^2. Con base en esta información: ¿Es posible saber cuál es la medida de cada una de sus aristas? De ser posible, ¿Cuál es esa medida? De no ser posible, explica por qué.
- Una caja de cartón tiene las medidas que se muestran.

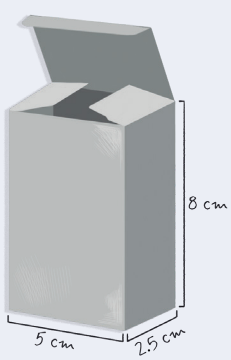


¿Cuál es la cantidad mínima de papel que se requiere para forrarla por su exterior?

- Comprueba la fórmula de Euler para el caso de los prismas hexagonal regular y heptagonal regular.

Representación gráfica		
Prisma	Prisma hexagonal	Prisma heptagonal
Número de vertices (V)		
Número de caras (C)		
Número de aristas (A)		

- ¿Será válido el resultado si se considera un prisma hexagonal irregular?
- ¿Y en el caso de un prisma heptagonal irregular?
- Necesitas diseñar una caja que contendrá jugo de frutas, con las medidas que se indican en la figura que se muestra.



¿Cuál es la cantidad mínima de cartón que se necesita para construir una cajita para jugo?

- Dispones de una hoja de papel rectangular cuyos lados miden 21.5 cm y 27.9 cm. ¿Es suficiente para construir una cajita de jugo (con las medidas dadas en la actividad anterior)?

Si es así, ¿Cuánto papel sobra?

De no ser así, ¿Cuánto debe medir el pliego de papel para que pueda construirse esta cajita?

Conversa sobre tu solución con tu docente y compañeros.

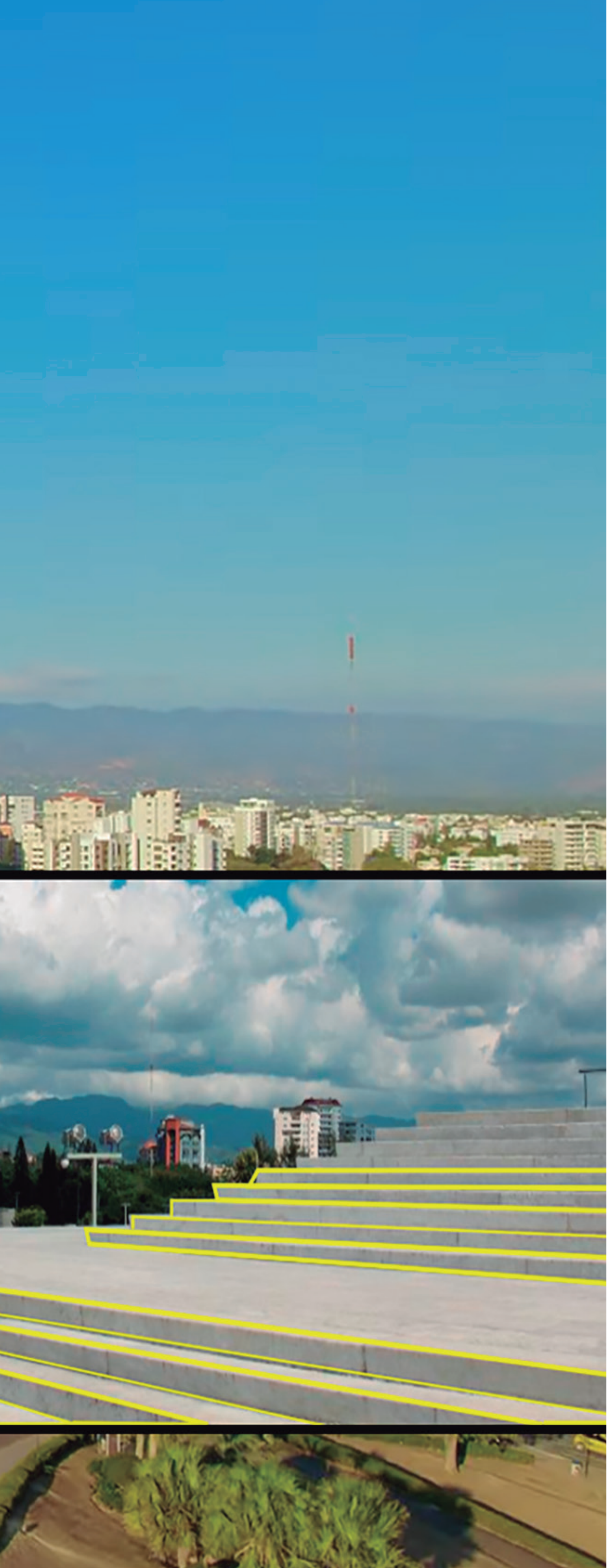
- Una de las estructuras de una escuela tiene forma de paralelepípedo, y se requiere calcular la superficie de sus caras laterales (sin considerar las bases, es decir: las caras "inferior" y "superior") con la intención de estimar la cantidad de pintura necesaria para su restauración.

Se sabe que el largo es 18 m, el ancho es 6 m, y la altura es 8.5 m.

¿Cuál es la superficie de sus caras laterales?

Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 9

Unidades de volumen

Situación de aprendizaje

En la imagen puedes observar una escalinata, construida en hormigón (es decir, con una mezcla de cemento, arena, piedra, grava y agua). A pesar de constituir un cuerpo único, está compuesto por otros que son prismas rectos, en este caso son paralelepípedos. ¿Es posible calcular el volumen de toda la estructura? De ser así, ¿cómo puede calcularse?

Contenido

- El concepto de volumen
- Equivalencia de unidades cúbicas
- Operaciones con unidades cúbicas
- Volumen de prismas rectos
- Volumen de cuerpos formados por prismas rectos
- Actividad grupal
- Evaluación

El concepto de volumen

El **volumen** de un objeto físico o cuerpo es un número que describe el espacio que éste ocupa.

Fuente: Freepik.com

Existen cuerpos, tal es el caso de los líquidos y los gases, que son afectados por factores como la temperatura, la presión, la densidad, entre otros. Y esta afectación ocasiona cambios en su volumen.
Aunque no solo aplica a los líquidos y gases. Por ejemplo: los rieles de ferrocarril se dilatan con el calor y se contraen al enfriarse.

Existen referencias de hace 7,000 años del uso de unidades de medida denominadas "brazo", "pie", "codo", "dedo", entre otras. Es decir, eran medidas basadas en el cuerpo humano (vale decir, antropométricas). Aun hoy, en ciertos contextos y con fines específicos, este tipo de medidas se continúa utilizando.

Otro ejemplo de medida arbitraria de volumen se da en el ámbito culinario: en éste es común hablar de taza o cucharada, para representar el volumen de los ingredientes en una receta. Si bien son medidas no precisas, son sumamente prácticas.

Fuente: Freepik

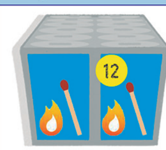
¿Cuáles ejemplos de medidas "arbitrarias" de longitud y de superficie puedes dar? ¿Cuáles se corresponden con el *Sistema Internacional de Unidades*?

Observa los ejemplos de unidades cúbicas arbitrarias

Cualquier objeto físico o cuerpo ocupa un espacio, en correspondencia con sus proporciones. La medida de tal espacio es su **volumen**.

En el caso de los cuerpos geométricos su volumen es fijo, es decir, invariante. En cambio, existen cuerpos cuyo volumen sí varía, dependiendo de una gran cantidad de variables, como, por ejemplo: la temperatura, el recipiente que lo contiene y la presión.

El cuerpo humano es también un ejemplo de cuerpo cuyo volumen es variable (de hecho, si lo contraes ocupará menos espacio que si estás en posición erguida).

Caja	Paquete	Huacal
		
6 unidades	12 unidades	20 unidades

Hay muchos casos en los que se pueden utilizar **medidas arbitrarias** para indicar el volumen de cierto cuerpo, casi siempre por razones prácticas. Por ejemplo: si una caja contiene 6 envases de leche, entonces puede decirse que el volumen de esa caja es 6. Aquí la unidad de medida es "un envase de leche".

Si un paquete contiene 12 cajas de fósforos, el número 12 es el volumen de ese paquete, donde la unidad de medida es "una caja de fósforos". Algo similar sucede si se identifica el volumen de un huacal con la cantidad de botellas, que éste puede almacenar o transportar.

Sistema Internacional de Unidades

Como advertirás, si bien las unidades de medida "arbitrarias" son importantes, la necesidad de precisión, intercambios, comunicación y universalidad llevó a la comunidad internacional a adoptar como una de sus unidades de medida básicas el metro (m) para el caso de la

longitud, el metro cuadrado (m^2) para la superficie, y el **metro cúbico** (m^3) para el **volumen**.

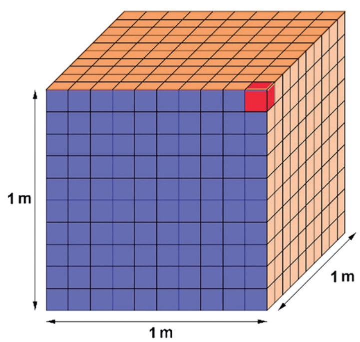
A partir del m^3 como unidad de medida, se definen otras, que son múltiplos o submúltiplos de este.

En la tabla adjunta se muestran algunas de ellas.

	Unidad de medida	Símbolo	Equivalencia
múltiplos	Kilómetro cúbico	km^3	$10^9\ m^3$
	Hectómetro cúbico	hm^3	$10^6\ m^3$
	Decámetro cúbico	dam^3	$10^3\ m^3$
	Metro cúbico	m^3	1^3
Sub-múltiplos	Decímetro cúbico	dm^3	$10^{-3}\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$10^{-6}\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$10^{-9}\ m^3$
	Micrómetro cúbico	μm^3	$10^{-18}\ m^3$
	Nanómetro cúbico	nm^3	$10^{-27}\ m^3$

Observa que un cubo de 1 m de arista, tiene como volumen 1 m^3. Y si divides las aristas de ese cubo en diez partes iguales, entonces cada parte medirá: 0.1 m.

Con lo cual el volumen del cubo de arista 0.1 m (en la figura, el que se ha destacado en rojo, es uno de ellos) será:



$v = (0.1\ m)(0.1\ m)(0.1\ m) = 0.001 m^3$.

Entonces:

$$v = \frac{1}{1{,}000} m^3 = 10^{-3} = 1 dm^3$$ (es decir, 1 decímetro cúbico).

Ten presente que $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$. Una forma abreviada de escribir este número es 10^{-3}. El exponente negativo indica que esa potencia está en el denominador de la fracción.

- **Aporta** ejemplos de medidas arbitrarias para el volumen, que se utilizan en tu contexto.
- **Investiga** el volumen de un ladrillo macizo.

El símbolo μ es tomado del alfabeto griego y se lee "mu". En ese alfabeto, su forma mayúscula es M.

Como prefijo se puede leer como "micro". Es decir, en nuestro contexto: 1 μm^3 significa "un micrómetro cúbico".

En el caso del cubo de arista $a=1$ m, su volumen es:

$v = a \cdot a \cdot a = (1\ m)(1\ m)(1\ m) = 1\ m^3$.

República Dominicana declaró oficial al Sistema Métrico Decimal (que posteriormente sería ampliado y modificado para conformar lo que hoy en día se conoce como Sistema Internacional de Unidades) en la Primera República, de acuerdo con el decreto del año 1867. No obstante, en el país coexisten, en la cotidianidad, distintas medidas según el contexto.

- Comunica, de manera coherente, ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

Equivalencia de unidades cúbicas

¿Recuerdas las equivalencias entre las unidades de medida de longitud y de superficie?

Reflexiona sobre la conversión de unidades cúbicas

Ciertas unidades de medida son adecuadas para indicar el volumen de objetos, cuerpos o sustancias, tal es el caso del volumen de un medicamento en forma de **jarabe**, el de un **ladrillo** de construcción, el de alguna **sustancia** a emplear en experimentos de laboratorio, o bien, el del agua de un **embalse**.

Es importante que conozcas las reglas de conversión entre las distintas unidades cúbicas: para convertir unidades consecutivas multiplicas por 1,000 o divides entre 1,000 (según si vas de izquierda a derecha o de derecha a izquierda).

$$km^3 \underset{\div 1{,}000}{\overset{\times 1{,}000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{\div 1{,}000}{\overset{\times 1{,}000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{\div 1{,}000}{\overset{\times 1{,}000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{\div 1{,}000}{\overset{\times 1{,}000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{\div 1{,}000}{\overset{\times 1{,}000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{\div 1{,}000}{\overset{\times 1{,}000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

Observa que dos unidades de medida consecutivas tienen como factor el 10 (precisamente porque nuestro sistema de numeración es decimal).

Por ejemplo, un cubo de volumen 1 m^3 tiene aristas que miden, naturalmente 1 m. Mientras que 1 dam^3 tiene aristas que miden 10 m. Por esta razón, el volumen del decámetro cúbico es:

$$v = (10 \text{ m})(10 \text{ m})(10 \text{ m}) = 1.000 \text{ m}^3.$$

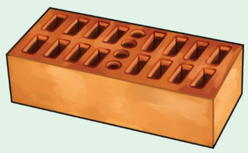
En general, si tienes un cubo de arista a y construyes otro de arista 10*a*, entonces el volumen del segundo cubo será:

$$v = (10 \text{ a})(10 \text{ a})(10 \text{ a}) = 1.000 \text{ a}^3.$$

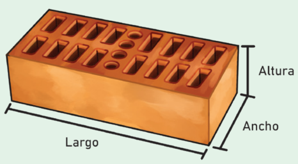
Si construyes un cubo de arista $\frac{1}{10}a$, entonces su volumen será:

$$\left(\frac{1}{10}a\right)\left(\frac{1}{10}a\right)\left(\frac{1}{10}a\right) = \frac{1}{1{,}000}a^3$$

Un ladrillo de construcción común puede tener un volumen aproximado de 0.001 m^3.



Para calcular su volumen debes multiplicar las medidas de su largo, ancho y altura:



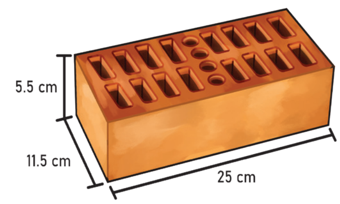
La Presa de Hatillo tiene un volumen de agua de aproximadamente 700 millones de m^3, lo que lo convierte en el lago de agua dulce más grande en El Caribe.

Fuente: Youtube

Todos los países, a través de sus laboratorios e instituciones, participan en eventos internacionales de pesas y medidas.

Ejemplo 1:

En una fábrica local se elaboran varios tipos de ladrillos para la construcción. Uno de ellos es un bloque macizo, con las medidas que se indican en la figura.



Con esta información puedes responder las preguntas: ¿cuál es su volumen en cm^3? y ¿cuál es su volumen en m^3?

Para ello debes calcular como sigue:

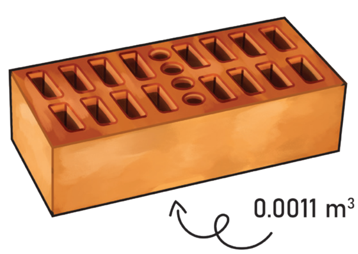
$$v = (5.5\ cm)(12.5\ cm)(25\ cm) = 1.718.75\ cm^3.$$

Luego, para convertirlo a m^3, escribes:

$$v = 1{,}718.75\ cm^3 = \frac{1{,}718.75}{(1{,}000)(1{,}000)} m^3 = 0.00171875\ m^3$$

El resultado de $\frac{1{,}718.75}{(1.000)(1.000)}$, se obtiene desplazando el punto hacia la izquierda, tantos lugares como ceros tiene el denominador (en este caso son 6 lugares).

Como las unidades cm^3 y m^3 están separadas por dos "peldaños" , se divide entre (1,000)(1,000)=1,000.000.



Ejemplo 2:

Supongamos ahora que, en las especificaciones de otro de los tipos de ladrillo macizo, se indica que su volumen es

$$v = 0.0011\ m^3.$$

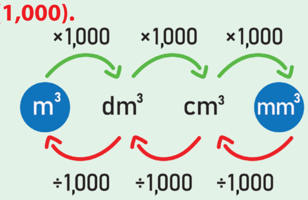
¿Cuál es su volumen expresado en cm^3?

Observa que el "sentido" de la conversión es distinto. Por ello debemos multiplicar por 1,000 tantos "peldaños" avancemos:

$$v=0.0011\ m^3= (1{,}000)(1{,}000)(0.0011)\ cm^3=1.100\ cm^3.$$

- ¿Cuántos dm^3 equivalen a 1 m^3?
- ¿Cuántos mm^3 equivalen a 1 m^3?
- ¿Cuántos metros cúbicos equivalen a 1.3 dam^3 ?

Si, por ejemplo, debes convertir una cantidad expresada en mm^3 a m^3, entonces, tal cantidad debe dividirse entre **(1,000)(1,000)(1,000).**



En cambio, si la conversión es en sentido contrario, es decir, de m^3 a mm^3, entonces, la cantidad debe multiplicarse por **(1,000)(1,000)(1,000).**

Fuente: tainomuseum.org

En la cultura Taína, de República Dominicana, se utilizaba un plato de cocción, elaborado en arcilla.

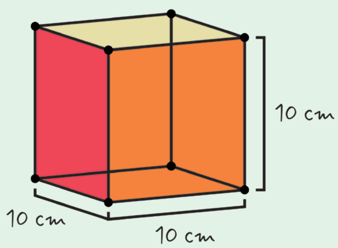
- Aplica el razonamiento lógico, para identificar y diferenciar situaciones de la vida cotidiana en las que se utilicen los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

En el caso de los líquidos el volumen puede representarse tanto en metros cúbicos (m^3) como en litros (l). Universalmente se asume que:

$$1\ l = 1{,}000\ \mathrm{cm}^3$$

Es decir, "Un litro equivale a mil centímetros cúbicos".

Un cubo cuyos lados miden 10 cm, tiene un volumen de $v = (10\ cm)\ (10\ cm)(10\ cm) = 1.000\ cm^3$.



Y como $1\ l = 1.000\ ml$, entonces:

$$1\ \mathrm{ml} = 1\ \mathrm{cm}^3$$

Es común también simbolizar el centímetro cúbico con las siglas "*cc*".

Observa que, en este caso, no es necesario utilizar la calculadora. Simplemente debes recordar que al dividir 1 entre 1,000, debes "correr" o "mover" el punto decimal tres lugares hacia la izquierda:

0. 0 0 1

Operaciones con unidades cúbicas

¿Cuál es el factor de conversión entre cm^3 y m^3?

Estima el volumen de cuerpos iguales

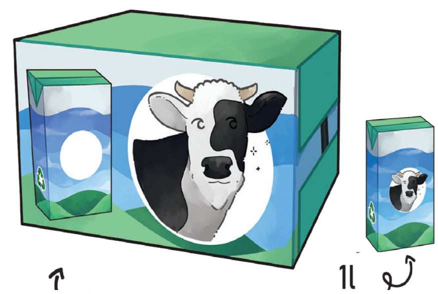
El concepto de **volumen** verifica una propiedad básica: dos cuerpos iguales tienen el mismo volumen.

Esta propiedad es independiente de la masa del objeto. Por ejemplo, dos esferas del mismo tamaño, una de metal y otra de vidrio, tienen el mismo volumen (es decir, el espacio que ocupan tiene la misma medida), pero tienen distinta *masa*.

Apoyándote en esta propiedad básica puedes abordar un sinnúmero de problemas de la vida cotidiana.

Ejemplo 1:

Una presentación de leche líquida consiste en una caja que contiene 12 *l* de leche.



En este caso, puedes calcular el volumen aproximado de la caja, omitiendo el volumen que ocupa el material con el que se ha fabricado:

$$v = 12 \cdot (1\ \mathrm{l}) = 12\ \mathrm{l}$$

Ejemplo 2:

Una pregunta importante es: ¿cuántos litros equivalen a 1 m^3? Para ello puedes partir de la relación:

$$1\ \mathrm{l} = 1.000\ \mathrm{cm}^3.$$

Para luego, convertirla a m^3:

$$1l = 1{,}000\ cm^3 = \frac{1{,}000}{(1{,}000)(1{,}000)}\ m^3.$$

Observa que, para convertir cm^3 a m^3, se deben "avanzar" dos "peldaños". Por esta razón, la cantidad dada debe dividirse entre (1,000)(1,000).

Solo falta completar los cálculos: $1l = \dfrac{1}{1{,}000}\ m^3 = 0.001\ m^3$

¿Cuál número debe multiplicarse, al lado derecho de esta igualdad, para obtener 1 m^3? Precisamente, 1,000. Para que la igualdad no se altere, multiplicas este mismo número al lado izquierdo de ella y obtendrás:

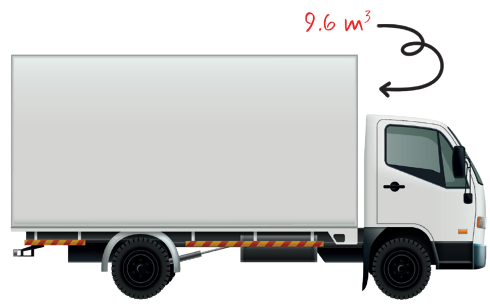
$$1{,}000\ l = (1{,}000)(0.001)\text{m}^3 = 1\ \text{m}^3.$$

Ya con esto puedes responder la pregunta inicial: 1,000 litros equivalen a 1 m^3.

Este tipo de cálculos son importantes en actividades concretas, como el transporte de alimentos, medicinas, materiales de construcción, etc.

Ejemplo 3:

Los camiones de carga suelen describirse por el volumen que pueden transportar. El que se muestra en la imagen tiene un volumen de carga útil de 9.6 m^3. ¿Cuántas cajas de 12 l de leche puede transportar?



Para responder esto puedes utilizar la relación anterior: 1,000 l =1 m^3. Entonces:

$$9.6\ \text{m}^3 = 9.6 \cdot 1.000\ \text{l} = 9.600\ \text{l}$$

Luego, si divides este número entre la cantidad de envases de leche que tiene una caja, tendrás el número de cajas que cubre ese volumen:

$$\frac{9{,}600}{12} = 800.$$

El volumen de 800 cajas es equivalente al que puede transportar ese camión.

- **Calcula** el volumen de una caja de fósforos, en cm^3.
- ¿Cuál es el volumen de un paquete que contiene 12 cajas de fósforos? **Valora** las respuestas de tus compañeros.

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

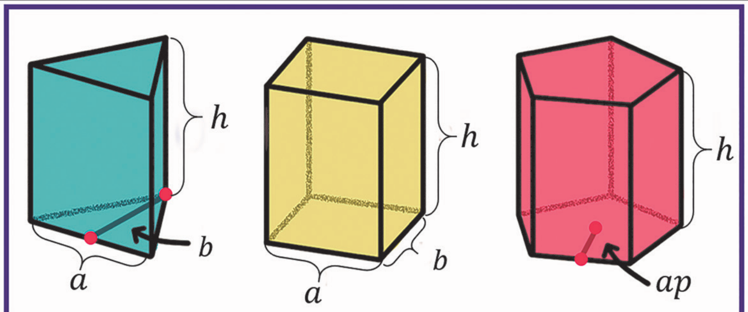
Las ideas de prisma recto, así como sus diferencias con otros cuerpos geométricos, son indispensables para el cálculo del volumen de cuerpos con estas formas. Incluso, cuando sea necesario aproximar el volumen de algunos de ellos.

Volumen de sólidos

¿Qué diferencia a los prismas de otros cuerpos geométricos?

Calcula el volumen de algunos prismas rectos

En la tabla que sigue se muestran algunos prismas rectos: el triangular, el paralelepípedo y el prisma pentagonal regular; así como las fórmulas que describen su volumen.



Prisma triangular	Paralelepípedo	Prisma pentagonal
$A_{\text{triángulo}} = \frac{a \cdot b}{2}$	$A_{\text{rectángulo}} = a \cdot b$	$A_{\text{rectángulo}} = \frac{P \cdot ap}{2}$
$v = A_{base} \cdot h$	$v = A_{base} \cdot h$	$v = A_{base} \cdot h$
$v = \frac{a \cdot b}{2} \cdot h$	$v = a \cdot b \cdot h$	$v = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h$

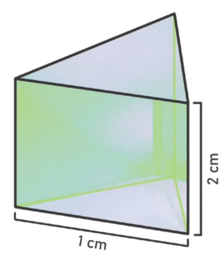
En todos estos casos, el volumen del prisma está dado por el producto del área de su base por su altura:

$$v = A_{base} \cdot h.$$

En el prisma triangular el área de su base, como sabes, es $\frac{a \cdot b}{2}$, donde a es la base del triángulo y b es la altura del mismo.

En el paralelepípedo el área de la base es a · b.

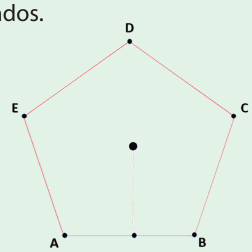
Y, en el prisma pentagonal, el área del pentágono es un medio del producto de su perímetro (P) y su apotema (ap), es decir: $\frac{P \cdot ap}{2}$



Ejemplo 1:

¿Cuál es el volumen del prisma regular que se muestra en la imagen? Observa que, como su base es regular, todas sus aristas miden 1 cm.

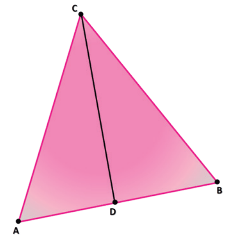
Recuerda que la **apotema** de un polígono regular es la menor distancia entre el centro y cualquiera de sus lados. En otras palabras, es la medida del segmento cuyos extremos son el centro del polígono regular y el punto medio de uno de sus lados.



En la figura anterior, si llamamos O al centro del pentágono regular y M al punto medio de $\overline{AB}$, entonces su apotema es la medida OM.

Por otra parte, su **perímetro** (P) es la suma de la medida de todos sus lados, es decir: AB + BC + CD + DE + EA. Como este pentágono es regular, entonces: P=5(AB).

¿Cuál es el área de este triángulo? Aquí puedes utilizar la **fórmula de Herón** . Como $s = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$. Entonces,



$$A\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{(1.5)(1.5-1)(1.5-1)(1.5-1)} =\sqrt{(1.5)(0.5)(0.5)(0.5)}$$

$$=\sqrt{0.1875}.$$

Esta raíz puedes obtenerla usando la calculadora. Con la intención de aproximar nuestros cálculos, solo tomaremos dos cifras decimales. Por tanto:

$$A\,\Delta\approx 0.43\ cm^2.$$

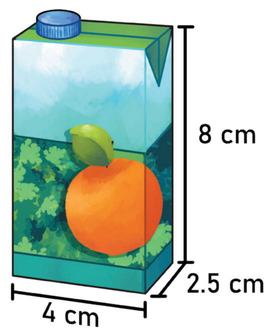
Ahora, puedes aplicar la fórmula para hallar el volumen del prisma:

$$v = A_{base}\cdot h$$

$$v \approx 0.43\ \text{cm}^2\cdot 2\ \text{cm} = 0.86\ \text{cm}^3.$$

Ejemplo 2:

Un envase de jugo de frutas tiene forma de paralelepípedo, con las medidas que se indican en la figura, ¿cuál es su volumen?



En este caso, conocidos el largo, ancho y altura del paralelepípedo, puedes aplicar directamente la fórmula:

$$v = a \cdot b \cdot h.$$

$$v = (4\ \text{cm})(2.5\ \text{cm})(8\ \text{cm}).$$

$$v=80\ \text{cm}^3.$$

Ten presente que, al multiplicar las unidades de medida, se conserva la base (que en este caso es cm) y se suman los exponentes (resultando 3).

- ¿Cuál es el volumen de una columna con forma de prisma pentagonal regular, si un lado de su base mide 20 cm? Apóyate en la calculadora.

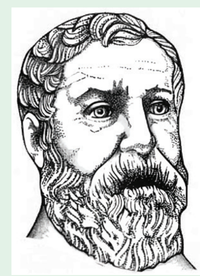
Fórmula de Herón: Herón de Alejandría, ideó una fórmula para calcular el área de un triángulo, cuando se conocen las medidas de sus tres lados *a*, *b* y *c*. Esta es:

$A\nabla=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

donde $s=(a+b+c)/2$.

Como advertirás, s es la mitad de su perímetro.

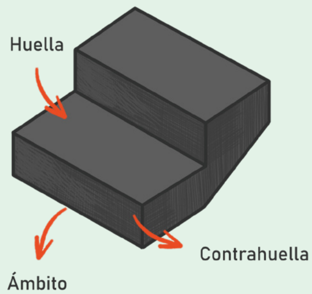
Herón fue un matemático e inventor griego, que vivió durante el siglo I. Formó parte de la importante Escuela de Alejandría, junto a sabios como Euclides, Eratóstenes, Diofanto, entre otros.



El símbolo ≈ significa "es aproximado a".

- Emplea con precisión, herramientas tecnológicas, para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

En un escalón: la medida de la zona de apoyo del pie se denomina huella, la altura de un escalón se denomina contrahuella, y el ancho se llama ámbito.

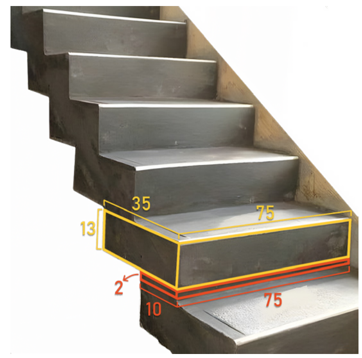


De estas medidas y de la proporción entre ellas, depende el grado de esfuerzo para subir (y bajar) por los escalones.

Volumen de cuerpos formados por prismas rectos

¿Cuál es la expresión que describe el volumen de un paralelepípedo?

Calcula el volumen de cuerpos formados por prismas rectos



La composición de cuerpos rectos es muy frecuente en nuestro entorno. Un ejemplo de ello en encuentra en el mundo de la construcción. En esta unidad calcularás el volumen de uno de estos cuerpos.

En la figura, se muestran unos escalones construidos en hormigón.

Este cuerpo complejo está compuesto por una serie de prismas rectos, en este caso, paralelepípedos.

Estos prismas son de dos tipos:

- El que se ha destacado en amarillo tiene como medidas: 13 cm x 35 cm x 75 cm.
- El que se ha destacado en rojo mide 2 cm x 10 cm x 75 cm.

¿Cuál es el volumen de toda la escalinata?

Observa que hay 10 paralelepípedos del tipo 1 y 10 paralelepípedos del tipo 2.

Con esta información puedes escribir el volumen de toda la escalinata, a través de la expresión:

$$v = 10v_{\text{tipo }1} + 10v_{\text{tipo }2}$$

Cuando estos cálculos se realizan con antelación a la construcción, permiten estimar la cantidad de material necesario para la mezcla (cemento, arena, piedra, etc.), la cantidad de madera para el encofrado, y, naturalmente, los costos.

Ya estás listo para hacer los cálculos.

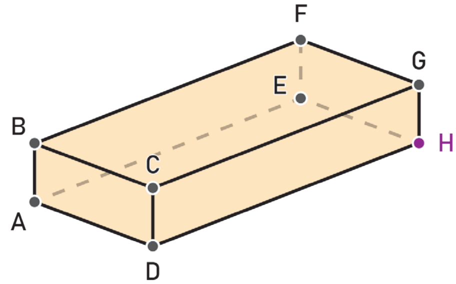
En el caso del paralelepípedo del tipo 1.

Recuerda que su volumen está dado por el producto del área de su base por la altura, es decir:

$v = A_{base} \cdot h$, entonces:

$v_{tipo\ 1} = 13\ cm \times 35\ cm \times 75\ cm.$

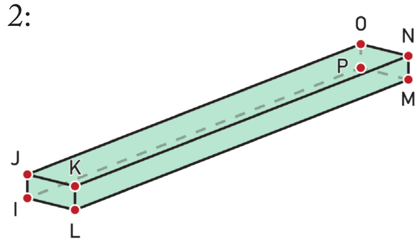
$v_{tipo\ 1} = 34{,}125\ cm^3.$



Y en el caso del paralelepípedo del tipo 2:

$v_{tipo\ 2} = 2\ cm \times 10\ cm \times 75\ cm.$

$v_{tipo\ 2} = 1{,}500\ cm^3.$



Y ya es posible obtener

el volumen de toda la estructura:

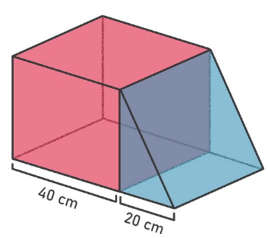
$v = 10 \cdot 34{,}125\ cm^3 + 10 \cdot 1{,}500\ cm^3.$

$v = 341{,}250\ cm^3 + 15{,}000\ cm^3 = 356{,}250\ cm^3.$

Y este número puede escribirse en m^3, tal como se acostumbra en el mundo de la construcción. La conversión es:

$$v = 356{,}250\ cm^3 = \frac{356{,}250}{(1{,}000)(1{,}000)}\ m^3 = 0.35625\ m^3.$$

- En una plaza pública se necesita construir cuerpos, como el que se muestra en la figura. **Observa** que está compuesto por un cubo de arista 40 *cm* y un prisma triangular, en el que uno de los lados de la base mide 20 *cm*. ¿Cuál es el volumen de todo el cuerpo?



Discute tu método y solución con el docente y tus compañeros.

Observa que, en el paralelepípedo que se denominó de tipo 1:

AB = 13 cm.
AD = 35 cm.
y
DH = 75 cm.

Mientras que, en el paralelepípedo de tipo 2:

IJ = 2 cm.
IL = 10 cm.
y
LM = 75 cm.

Observa que para convertir una cantidad dada en *cm^3* a *m^3*, se debe dividir esta cantidad entre **(1,000)(1,000)**, es decir, entre 1,000,000.

0.35625 es aproximado a un tercio, en símbolos:

$0.35625 \approx \frac{1}{3}$

Por tanto, el volumen de toda la estructura de escalones es, aproximadamente, un tercio de metro cúbico.

- Formula y resuelve de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Actividad grupal

Calculando el volumen de otros cuerpos

¿Qué haremos?

Calcular el volumen de algunos cuerpos con forma de cono, esfera y cilindro.

En el caso del cono, su volumen es "un tercio de Pi por el radio al cuadrado por su altura". El volumen de la esfera es "cuatro tercios de Pi por su radio al cubo". Y en el cilindro, su volumen es "Pi por el radio al cuadrado por su altura".

¿Qué necesitamos?

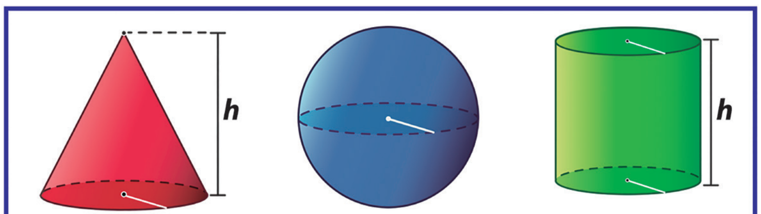
Reglas, escuadras, calculadora o ***GeoGebra***.

¿Cómo nos organizamos?

Trabajen en pareja, cooperen en todo momento y valoren sus ideas y las de su compañero.

¿Cómo lo haremos?

Seleccionen algunos objetos de su entorno con forma de cono, esfera y cilindro. En la tabla que sigue se muestran estos cuerpos, junto con la fórmula que describe su volumen.



Cono	Esfera	Cilindro
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$

Estos cuerpos comparten una característica común: todos tienen al menos una de sus caras o al menos una de sus superficies de forma **curva**. Por tal razón suelen denominarse "cuerpos redondos". Además, son muy frecuentes en la cotidianidad, en la ciencia y en la tecnología.

Muchísimos objetos de nuestro entorno tienen forma de cuerpos redondos. Por ejemplo, algunas señales de demarcación, tanto para el tránsito como para algunas disciplinas deportivas, tienen forma de cono, así como también la estructura de la galleta en las barquillas, o bien, algunas mechas especiales para perforar madera u otros materiales. Las esferas son bastante comunes en el sistema de rodamiento de las bicicletas, en el diseño de tanques de reserva de agua,

En la cultura egipcia, de hace aproximadamente 4,000 años, calculaban con bastante precisión el volumen de cuerpos como las pirámides, truncadas o no.

Aquí te mostramos un ejemplo de cada una:

Fuente: Jeremy Bishop unsplash.com

Fuente: Max Böhme unsplash.com

etc. Y los cilindros están presentes, por ejemplo, en las tuberías, en cierto tipo de columnas de edificaciones, etcetera.

Observen que, en todas estas fórmulas, aparece el número π (Pi). En sus cálculos pueden tomar una aproximación de este con dos cifras decimales, es decir:

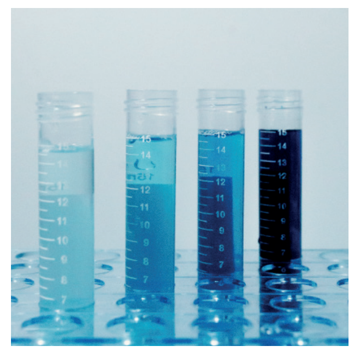
$$\pi \approx 3.14.$$

- Construyan, en sus cuadernos, una tabla como la que se muestra:

Objetos de tu entorno con forma de		
Cono	**Esfera**	**Cilindro**

- Agreguen tantas filas como sea necesario.
- Elaboren un método para estimar el radio y la altura, (para el caso de los objetos con forma de cono y de cilindro), y para estimar el radio (en el caso de los objetos con forma de esfera). Pueden utilizar instrumentos como reglas y escuadras. Conversen sobre su método con el docente y los compañeros.
- Ya con los datos que han obtenido, pueden calcular el volumen de cada objeto.
- Tomen nota de los métodos que idearon y de los resultados obtenidos.

Ejemplo de esferas. Fuente: Pexels



Ejemplo de cilindros. Fuente: Pexels.

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada equipo comunicará sus resultados a toda la clase, así como los métodos que idearon para estimar el radio y la altura de los objetos seleccionados.

Coevaluación

Los demás compañeros, junto al docente, realizarán observaciones y sugerencias sobre el proceso y los cálculos, valorando en todo momento las ideas y aportes de todos.

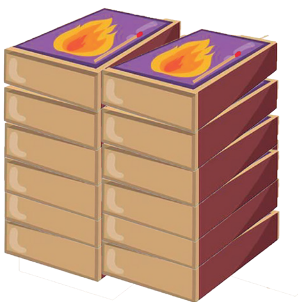
Autoevaluación

¿Qué aprendiste en esta actividad? ¿Qué aspectos puede s mejorar? ¿Cómo puedes mejorarlos?

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

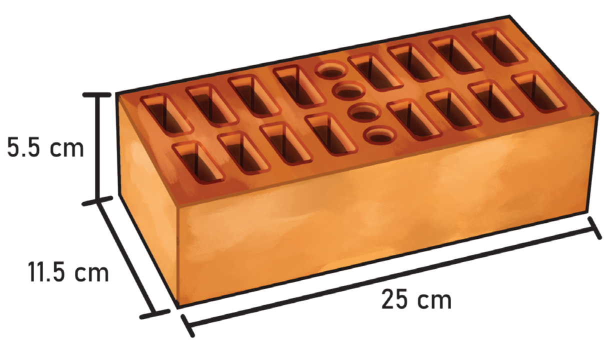
Evaluación

- Da ejemplos de objetos de tu entorno, que tengan la forma de prismas rectos.
- Muestra ejemplos de otros, que tengan forma de cuerpos redondos.
- Construye una lista de objetos de tu ambiente, que estén compuestos por varios prismas rectos.
- Una presentación de fósforos está empacado por una "gruesa", es decir, en paquetes que traen 12 cajitas de fósforos. Si estos empaques son como los que se muestran, ¿cuál es su volumen?



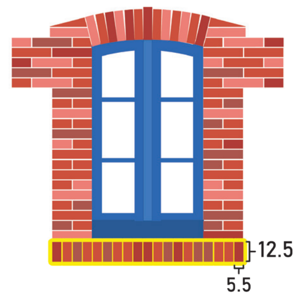
- Se requiere apilar 10 ladrillos en la base de una ventana, en la posición que se muestra en la figura.

  Se dispone de ladrillos con las medidas que se indican a continuación.

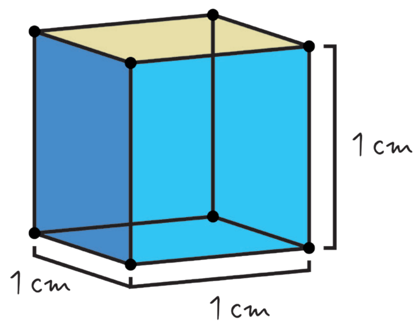


Para una estimación de costos, se necesita calcular el volumen de los 19 ladrillos que estarán en la base de la ventana, tal como se muestra en la imagen.

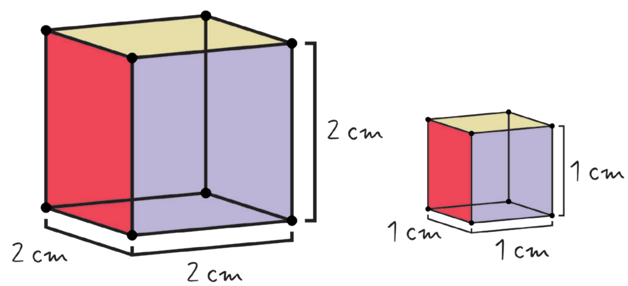
¿Cuál es el volumen de los 19 ladrillos apilados, como se muestra en la imagen?



- ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista 1cm?



- Observa las siguientes figuras.



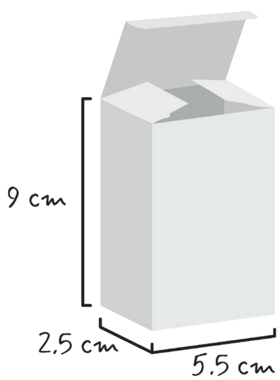
En estas se han construido dos cubos, uno de arista 1 cm y otro de arista 2 cm. Es decir, este último cubo se dice que es la "duplicación" del primero.

¿Es el volumen de este nuevo cubo el doble del volumen del anterior? De no ser así, ¿cuánto varía su volumen? Discute tus ideas y respuesta con tus compañeros y el docente.

- Calcula el volumen de un cubo de arista 4cm.
- Construye, en tu cuaderno, una tabla con los datos que se indican.

Cubo	Volumen
Arista 1 cm	
Arista 2 cm	
Arista 4 cm	

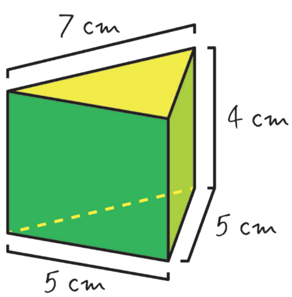
- Sin hacer los cálculos, ¿es posible decir cuál es el volumen de un cubo de arista 8 cm?
- Se ha diseñado un empaque que contendrá un medicamento.



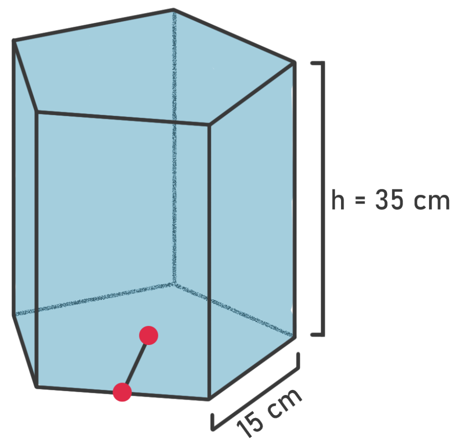
¿Cuál es su volumen?

Si el ancho de la caja anterior fuese de 6 cm, ¿cuánto varía el volumen de la caja? Conversa sobre tu solución con el docente y tus compañeros.

- ¿Cuál es el volumen del prisma triangular que sigue?



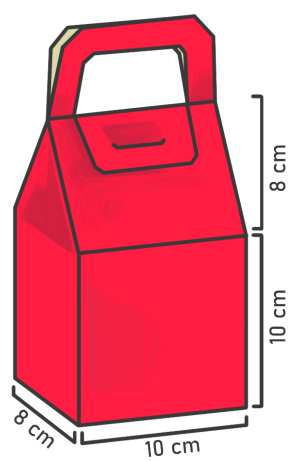
- Una columna de decoración para una obra tiene la forma que muestra la figura.



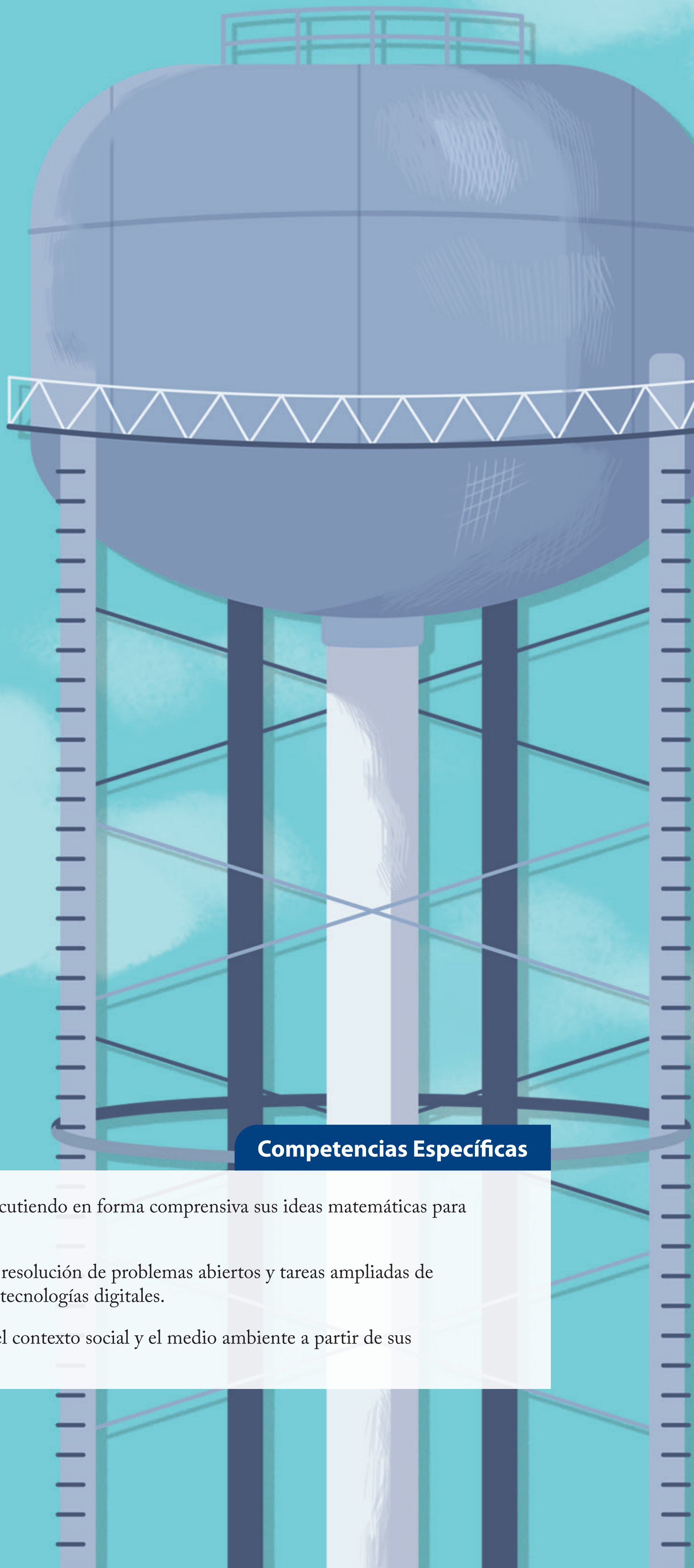
Su base es un pentágono regular.

Con la información que se da, calcula su apotema y el volumen de este cuerpo.

- ¿Cuál es el volumen total de una caja, con las medidas que se exponen a continuación?

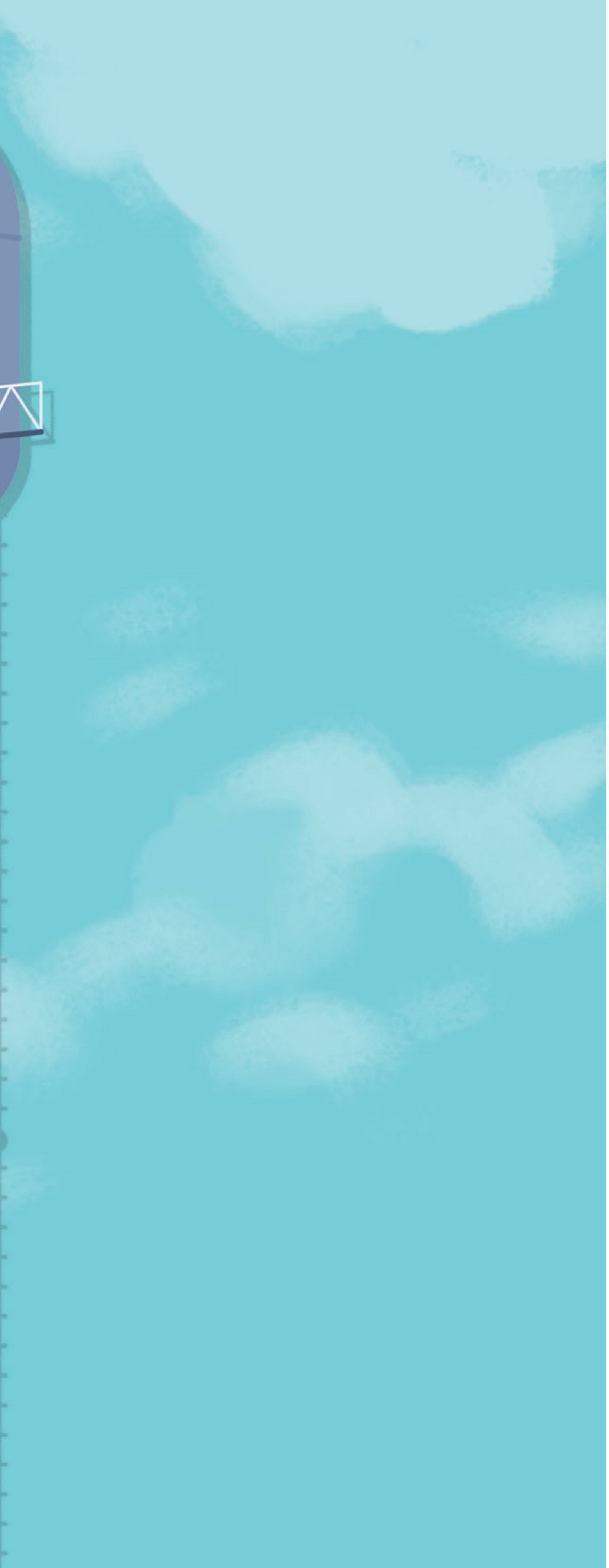


- ¿Qué aprendieron de estas actividades? ¿Qué aspectos pueden mejorar? ¿Cómo pueden hacerlo?



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 10

Capacidad

Situación de aprendizaje

Observa el tanque de reserva de agua que se muestra en la imagen.

¿Se asemeja su forma a la de algún cuerpo conocido?

¿Qué información hace falta para estimar su capacidad?

Apóyate en las ideas que ya manejas sobre el volumen.

Contenido

- La capacidad como volumen interno de recipientes
- Unidades de capacidad
- Equivalencia entre el decímetro cúbico y el litro
- La onza fluida, la taza, la pinta y el galón
- Medida y estimación de capacidad
- Actividad grupal
- Evaluación

La capacidad como volumen interno de recipientes

Algunas maquinarias que son utilizadas en la construcción y en la minería, suelen describirse a través de su capacidad de carga.

Fuente: unsplash.com

¿Cómo se define el volumen de un cuerpo?

La idea de recipiente

Un recipiente es un objeto que tiene la propiedad de contener productos líquidos, sólidos, o incluso gases. Por ejemplo, los vasos, frascos, cajas, tazas, botellas, vasijas, envases y goteros son recipientes; además, son de uso común en múltiples situaciones de la vida cotidiana, como en la medicina, construcción, cocina, agricultura, industria, pesca, entre muchas otras.

Vasija	Envase	Goteros
		

Fuente: researchgate.net

La imagen muestra una vasija asociada a la cultura Taína, de base circular y boca abierta; esta última con un diámetro de 32 *cm*. Su altura es de 16.3 *cm*.
Los recipientes que utilizaban nuestros antepasados, constituyen un elemento importante de nuestra cultura; a partir de ellos, pueden describirse algunas de sus costumbres y tecnologías.

Además, los materiales con los que están elaborados dependen del uso, de su resistencia, de la durabilidad y de otros factores. Los hay de cerámica, vidrio, plástico, cartón, palma, cobre, aluminio y muchos otros elementos.

El concepto de recipiente será importante para la idea central de esta unidad: la capacidad.

Reflexiona sobre el concepto de capacidad

La capacidad de un recipiente expresa cuánto puede contener. De hecho, muchos de ellos exponen datos sobre su capacidad, por ejemplo, la botella de alcohol de la imagen indica que la misma es de 1,000 mililitros (ml).

Fuente: CAUCE

En la tabla que se muestra a continuación, pueden apreciarse varios envases, con su respectiva indicación sobre la capacidad. Uno de ellos es de cocina, en él se expone una escala con marcas, para 1 y 2 litros (l); otro, es un tanque de gas propano, con capacidad para 8 kilogramos (kg); el tercero, es una jeringa grande, con capacidad de 250 centímetros cúbicos (*cc*), con marcas, cada 10 *cc*.

Recipiente de cocina	Tanque de gas	Inyectadora/Jeringa
		
2 l	8 kg	250 cc

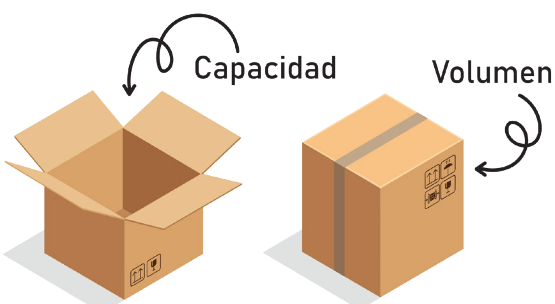
Tubos de ensayo con medidas.
Fuente: Pexels.

Observa que uno de los recipientes, precisamente el tanque de gas propano que tiene múltiples usos, tanto en los hogares como en la industria, indica su capacidad en kg.

La razón es la siguiente: si bien este gas se almacena en ese recipiente, en su forma líquida, es más práctico expresar su capacidad en kg, debido a que es más fácil pesar el tanque que comprobar la cantidad de litros de gas que este contiene.

Diferencia entre capacidad y volumen

La capacidad y el volumen son conceptos estrechamente relacionados. De hecho, la capacidad de un recipiente puede definirse como el volumen del producto que puede contener. Observa detenidamente, la imagen de las dos cajas que ilustran esta idea.



- **Busca** recipientes de distintos productos y construye una tabla en la que se indique su capacidad.
- **Ordénalos** de menor a mayor, según su capacidad.

- Comunica de manera coherente, ideas y procesos matemáticos a las situaciones del contexto, vinculando los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

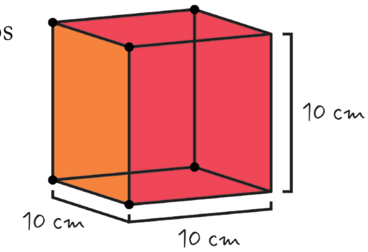
Unidades de capacidad

El litro, como unidad de medida, suele emplearse en el caso de fluidos y de sólidos que pueden verterse. Ejemplos de ello son los líquidos y la sal, tal como se muestra en las imágenes.

¿Cuál es la unidad básica para medir el volumen de un cuerpo?

La unidad de medida de capacidad

En los acuerdos internacionales, expresados en el *Sistema Internacional de Unidades*, la unidad básica para expresar y medir la capacidad de un recipiente es el litro, el cual suele abreviarse con la letra l, aunque también es posible utilizar la letra en mayúscula: L.



Como sabes, 1 *l* equivale a un 1 dm^3, Esto, es igual a decir: un litro equivale a un decímetro cúbico.

Observa que un recipiente con forma de cubo, cuyo lado mide 10 cm, tiene una capacidad de 1 litro,

$$10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 1{,}000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ l}$$

El litro, como unidad de medida, es bastante común en la vida diaria. La tabla que se presenta a continuación, muestra algunos ejemplos de esto.

1l	1l	1l	1l
Jugo de frutas	Aceite	Vinagre	Crema corporal

Observa, además, que todos estos recipientes aun cuando tienen distintas formas, su capacidad es la misma. Naturalmente, como en el caso de las demás unidades de medida, existen múltiplos y submúltiplos del litro.

En el caso de la escala del litro, el factor de conversión entre unidades contiguas es 10.

Si se "asciende" un peldaño en la escala, la cantidad a convertir debe dividirse entre 10.

Si se "ascienden" dos peldaños, la cantidad a convertir debe dividirse entre 10·10; y así, sucesivamente.
En cambio, si se "desciende" en la escala, tal factor debe multiplicarse.

Por ejemplo:

¿A cuántos *ml* equivalen 8 *l*?

Para ello debes calcular como se muestra:

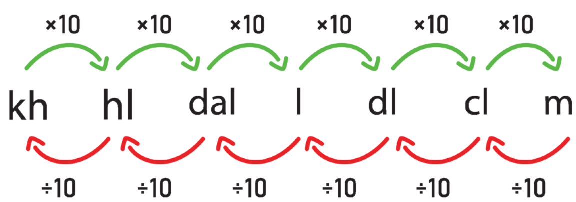
8 l= 8 · 10 · 10 · 10 ml = 8,000 ml.

(Observa que se multiplicó por 10 · 10 · 10, ya que se "descienden" 3 peldaños en la escala).

Observa cuáles son los múltiplos y submúltiplos del litro

Tanto las unidades mayores al litro, como son: el decalitro (dal), el hectolitro (hl) y el kilolitro (kl); como las menores: el decilitro (dl), el centilitro (cl) y el mililitro (ml), varían, de acuerdo con el criterio que sigue: **una unidad mayor es 10 veces la unidad inmediata menor.**

El diagrama que sigue, ilustra los múltiplos y submúltiplos de la unidad de medida que estamos estudiando, así como el criterio de variación.



Ejemplo: un envase de aceite comestible indica un contenido de 900 ml. ¿A cuántos litros equivale esta cantidad?

Observa que para convertir a litros una cantidad dada en mililitros, debes "desplazarte" 3 peldaños, de derecha a izquierda, en la escala que se mostró antes.

Entonces, debes dividir la cantidad dada entre 10·10·10=1.000. Por tanto:

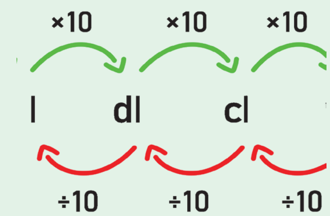
$$900\ \color{red}{ml} = \frac{900}{\color{red}{\mathbf{10 \cdot 10 \cdot 10}}} = \frac{900}{1.000} = 0.9\ l.$$

Así, 900 *ml* equivalen a 0.9 *l*.

Con estas ideas puedes efectuar cualquier conversión, en esta escala.

En la figura que sigue se han destacado los tres "peldaños" de la escala que deben considerarse para expresar 900 *ml* en *l*.

Si la conversión fuese en sentido contrario, en vez de dividir por 1,000, habría que multiplicar por 1,000.



- ¿Cuántos *dl* equivalen a 900 *ml*? (b) ¿Cuántos dal equivalen a 900 *ml*? **Discute** tu método y resultado con el docente y tus compañeros.

- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre el área.

El litro se introdujo en Francia en 1,795, como una de las llamadas nuevas unidades de medida, de la naciente República.

Posteriormente, sobre la base de distintos convenios internacionales, el litro se asumió como unidad de medida de capacidad.

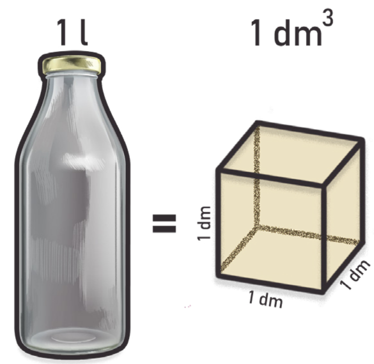
Para estas equivalencias es necesario recordar la escala con los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico, que ya estudiaste en la Unidad anterior.

Equivalencia entre el decímetro cúbico y el litro

¿Qué es un decímetro cúbico?

Reflexiona sobre la equivalencia entre el dm³ y el l

Como sabes, el decímetro cúbico (dm^3) es una medida de volumen, mientras que el litro (l) es una medida de capacidad.



Sin embargo, estas se definen como equivalentes, es decir:

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

Por ejemplo, si una botella tiene capacidad de 1 l, al verter su contenido en un recipiente de caras adyacentes perpendiculares, y cuyos lados miden 1 dm (como el que se muestra en la imagen), entonces, todo el contenido de la misma llena este otro depósito. Es por esta razón que, 1 l y 1 dm^3 se consideran equivalentes.

Esta relación permite deducir otras equivalencias, entre las unidades de capacidad y las unidades de volumen.

Así, 1 l equivale a 0.001 m^3, pero también a 1,000 cm^3, y a 1,000,000 mm^3.

1 *l*

$0.001\ m^3$	$1\ dm^3$	$1{,}000\ cm^3$	$1{,}000{,}000\ mm^3$
0.001 metros cúbicos	1 decímetro cúbico	1,000 centímetros cúbicos	1,000,000 milímetros cúbicos

Ejemplo:

Para una actividad, con niños y jóvenes, se ha preparado batida de granadillo, la cual se ha refrigerado en recipientes, como los que se muestran en la imagen.

En cada uno de ellos se ha alcanzado su máxima capacidad: 1.5 l.

Luego de refrigerada, se verterá la batida en vasos, cuya capacidad es de 0.2 dm^3. ¿Cuántos vasos podrán servirse?

Para responder esto, debes proceder como sigue:

Los dos recipientes contienen $2 \cdot 1.5\ l =$ $3\ l$ de la bebida.

Esta cantidad puede convertirse de litros a decímetros cúbicos así:

$$3\ l = 3\ dm^3.$$

Después, para calcular el número de vasos (con capacidad de 0.2 dm^3 cada uno) que pueden servirse, divide 3 dm^3 entre 0.2 dm^3:

$$\frac{3\,dm^3}{0.2\,dm^3} = 15.$$

Es decir, podrán servirse 15 vasos de 0.2 decímetros cúbicos, cada uno.

Y como sabes, la capacidad de cada vaso puedes expresarla en cm^3. En este caso, basta multiplicar 0.2 por 1,000 (ya que dm^3 y cm^3 son unidades contiguas, en la escala de volumen):

$$0.2\ dm^3 = 0.2 \cdot 1{,}000\ cm^3 = 200\ cm^3.$$

- Si los vasos tuvieran una capacidad de 0.25 dm^3, ¿cuánto vasos podrían servirse con los 3 l de batida de granadillo?

Este procesamiento puedes efectuarlo con la calculadora, sin embargo, también puedes hacerlo como sigue:

$$\frac{3\,dm^3}{0.2\,dm^3} = \frac{5}{5} \$ \frac{3\,dm^3}{0.2\,dm^3} = \frac{15}{1} = 15$$

Observa que se multiplicó por 5, tanto el numerador como el denominador, con la intención de que el denominador se transforme en un número entero.

La batida de granadillo es una de las bebidas tradicionales de República Dominicana.

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

Cuando este grado de precisión no es necesario, se aproxima 1 *fl.oz.* a *30 m*l.

Existen envases, con goteros incluidos, con capacidades de 0.5, 1 y 2 onzas fluidas (entre otros), con la intención de facilitar la dosificación indicada por los especialistas.

En las preparaciones de alimentos para bebés, también es común utilizar recipientes con escalas en onzas fluidas.

Mientras que, en los tanques de combustible es frecuente emplear el galón, como unidad de medida.

Fuente: Freepik

La onza fluida, la taza, la pinta y el galón

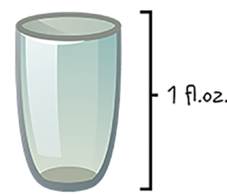
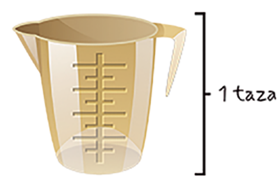
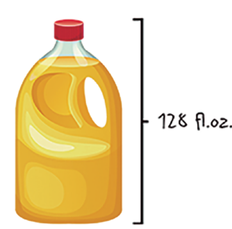
¿Cuáles unidades conoces para medir la capacidad de un recipiente?

Observa otras unidades de medida de capacidad

Además del litro, como unidad de medida de capacidad, en República Dominicana se utiliza también la onza fluida, y algunos de sus submúltiplos y múltiplos. Esta medida, conocida también con el nombre de onza líquida, se simboliza con fl. oz., y equivale a:

$$1\ fl.\ oz. = 29{,}5735295625\ ml$$

Por tanto, 1 *fl.oz.* ≈ 30 *ml* (una onza fluida es aproximadamente 30 *ml)*.

Unidad de medida	Características	Ejemplo
Onza fluida	Equivale a $\frac{1}{8}$ de taza. En la repostería y en la cocina en general, así como en medicina, agricultura, y en muchas otras áreas, es frecuente el uso de esta medida de capacidad.	
Taza	Son 8 onzas fluidas. Es de uso común en la preparación de alimentos.	
Pinta	Equivale a 16 onzas fluidas. Uno de sus usos se encuentra en los envases para helados.	
Galón	Equivale a 128 onzas fluidas. Es muy común para expresar la capacidad de los tanques de combustible, e incluso, en envases para aceite comestible, detergentes o soluciones jabonosas.	

Cualquiera de estas unidades puede describir la capacidad de un recipiente, pero el contexto hace que algunas sean apropiadas y otras no. Por ejemplo, para los biberones, llamados también teteros, suele utilizarse la onza , como unidad de medida; en cambio, para los tanques de combustible se acostumbra emplear el galón.

Convierte cantidades de una unidad de medida a otra

Las conversiones entre unidades de medida de capacidad siempre serán necesarias.

Ejemplo:

Para una actividad se ha preparado una pinta de helado a base de coco, otra de pistacho y media pinta de chinola. Estos se servirán en conos, con presentación de 1 onza fluida.

1 fl.oz

¿Cuántos conos de helado pueden servirse?

Para ello es necesario sumar la cantidad de pintas que se han preparado: $1 + 1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$.

Luego, convertir la cantidad que se ha expresado en pintas a onzas fluidas. Una forma de hacerlo es la siguiente:

$$2.5 \text{ pintas} = 2.5 \cdot (16 \text{ onzas fluidas}).$$

Ya que cada pinta equivale a 16 onzas fluidas.

Después, se efectúa el cálculo indicado:

$$2.5 \text{ pintas} = 40 \text{ onzas fluidas}$$

Es decir, podrán servirse 40 conos de helado con presentación de 1 fl.oz. cada uno

- Un tanque de combustible de un vehículo tiene capacidad de 12 galones, ¿a cuántas onzas fluidas equivale esta cantidad?

Otra unidad de medida relacionada con la onza fluida es el cuarto, el cual equivale a 32 onzas fluidas, o bien, 4 tazas.

Algunas presentaciones de bebidas, que tiene como base frutas o lácteos, se comercializan en cuartos.

Jarra con medidas. Fuente: Pexels.

- Emplea con precisión herramientas tecnológicas, para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros.

Medida y estimación de capacidad

Un aspecto esencial, en la solución de problemas matemáticos, es ser conscientes de los posibles errores, tanto en el cálculo como en el análisis.

Isaac Newton.

"En matemáticas no se deben despreciar ni los errores más diminutos".

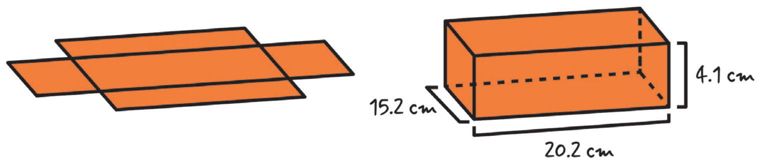
Fuente: https://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/

¿Cuáles son las fórmulas para calcular el volumen de un paralelepípedo y de un cilindro?

Calcula la capacidad de un recipiente

Ejemplo 1:

Con un cartón, cuyo espesor es de 1 *mm*, se ha cortado una plantilla y con esta se ha construido una caja. Observa las imágenes que se muestran.



Esta caja, ya armada, tiene las medidas indicadas. ¿Cuál es su capacidad?

El espesor del recipiente es una información importante, pues este afecta su capacidad.

Aquí, puedes aplicar una de las ideas estudiadas en esta unidad: el volumen de un recipiente es precisamente el volumen del material que puede contener.

En este caso, apoyándote en las medidas que se dan, puedes calcularla. Sin embargo, sería un error si apoyado en el cálculo:

$$v = 15.2 \text{ cm} \cdot 20.2 \text{ cm} \cdot 4.1 \text{ cm},$$

concluyeras que el contenido tiene un volumen de 1,258,864 cm^3. ¿Por qué se trata de un error? Porque el espesor de la caja influye en la capacidad de este recipiente.

Observa que nos hemos apoyado en la conversión:

1 *mm*=0.1 *cm*.

Entonces, lo correcto es determinar las medidas del espacio libre: se hace restando el espesor de las paredes y del fondo (o base) de la caja. Entonces, el espacio libre tiene las siguientes dimensiones:

Largo: 20.2 cm - 0.2 cm = 20 cm

Ancho: 15.2 cm - 0.2 cm =15 cm

Alto: 4.1 cm - 0.1 cm = 4 cm

Con estas medidas, ya estás en condiciones de calcular el volumen del espacio libre:

$$v = 15 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 1.200 \text{ cm}^3.$$

Además, este número puedes expresarlo en *l*, así: $1{,}200\ cm^3 = \frac{1{,}200}{1{,}000}\ l = 1.2\ \text{l}$. Esta es la capacidad de esa caja de cartón.

Ten presente que 1,000 centímetros cúbicos equivalen a 1 litro:

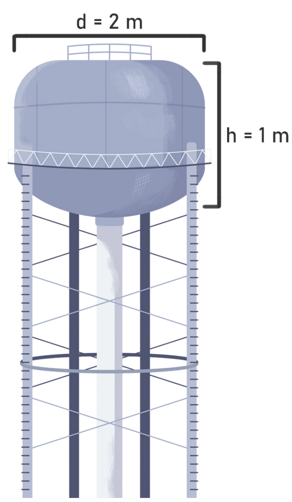
$1{,}000\ cm^3 = 1\ l$.

Estima la capacidad de un tanque de almacenamiento de agua

Ejemplo 2.

Entonces, la capacidad de la caja del primer ejemplo es de 1.2 *l*.

Hay casos en los que es suficiente con una estimación de la capacidad, en vez de un cálculo preciso. En la imagen se muestra un tanque de almacenamiento de agua. Observa que, aunque no es un cilindro, su forma se asemeja a este.



Fuente: Freepik

Así que puedes estimar su capacidad, es decir, hallar un valor aproximado de esta.

Para ello, basta con aplicar la expresión que describe el volumen de un cilindro: $v = \pi r^2 h$. La altura ya está dada como información: $h = 1$ m. El radio, como sabes, es la mitad del diámetro: $r = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} = 1 \text{ m}$.

Al multiplicar 3.14 por 1, y nuevamente por 1, se obtiene 3.14. Y al multiplicar las unidades m^2 por m, resulta m^3.

Por tanto:

$v = 3.14 \cdot (1\ m)^2\ (1\ m)$

$v \approx 3.14\ m^3$.

Su conversión en litros es: $v \approx 3.14\ m^3 = 3.14 \cdot 1{,}000\ \text{l} = 3{,}140\ \text{l}$.

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

- Luego de afinar la medición del tanque de agua anterior, se observó que su altura es de 1.1 m. **Estima** la capacidad del mismo.

Actividad grupal

Estimando la capacidad de algunos recipientes

En matemáticas, la experimentación es una actividad importante, que la vincula con el entorno y con otras áreas de conocimiento.

¿Qué haremos?

Estimar la capacidad de algunos recipientes de distintas formas.

¿Qué necesitamos?

Envases de plástico de distintas formas y uno como de un paralelepípedo, papel, lápiz, marcador, embudo y una sustancia a utilizar (agua, granos o arena).

Conversa con el docente sobre algunas estrategias para aprovechar o reutilizar materiales, como las botellas plásticas, así como algunos aspectos que se relacionan con el cuidado y conservación del ambiente.

¿Cómo nos organizamos?

Trabajen en parejas, expresen sus ideas, respetando las de su compañero y cooperen en todo momento.

¿Cómo lo haremos?

Escojan algunos recipientes de plástico de distintas formas y dimensiones, incluyendo el parecido a un paralelepípedo, y etiquétenlos con letras mayúsculas.

Además, atiendan la indicación del maestro sobre la sustancia a utilizar, en correspondencia con, por ejemplo, las características del aula de clases: agua, granos o arena.

Envase A	Envase B	Envase C	Envase D

- Sin hacer ningún cálculo o experimentación, escriban una hipótesis sobre cuál recipiente tiene menor capacidad, cuál le sigue y así, hasta llegar al último de los seleccionados.

Puedes consultar la página del Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales (MARENA), de República Dominicana, para investigar sobre los proyectos de protección del ambiente, que se llevan a cabo en la actualidad.

Para ello pueden apoyarse en el símbolo <, por ejemplo, si piensan que el recipiente M tiene menor capacidad que el recipiente N, entonces pueden escribir: M<N.

- Ahora, tomen como referencia el recipiente que consideren posee mayor capacidad.
- Llenen, con la sustancia indicada, otro de los recipientes y viertan su contenido en el que tiene mayor capacidad. Luego, realicen una marca, como se muestra en la imagen.

- Repitan el paso anterior, con el resto de los envases.
- Al terminar con todos, tendrán el orden de estos de acuerdo a su capacidad.
- Tomen nota de sus resultados.
- Comparen sus resultados con la hipótesis.

Presentación y socialización de las actividades

Un miembro de cada equipo expondrá la hipótesis que plantearon en su equipo, comunicará sus resultados a toda la clase y concluirá si la hipótesis inicial era verdadera o falsa.

Coevaluación

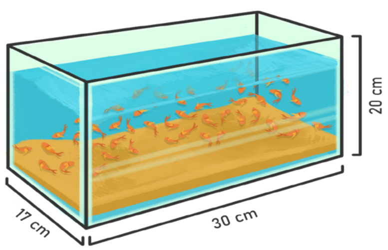
Los demás compañeros, junto al docente, realizarán observaciones y sugerencias sobre el experimento, valorando en todo momento las ideas y aportes del grupo.

Autoevaluación

¿Qué aprendiste en esta actividad? ¿Qué dificultades encontraste? ¿Cómo la enfrentaste? ¿Qué aspectos puede s mejorar?

- Formula y resuelve, de manera correcta, problemas del entorno, cuya solución requiera de los conocimientos de numeración, fracciones, geometría y medida, con números decimales y enteros, para la toma de decisiones pertinentes.

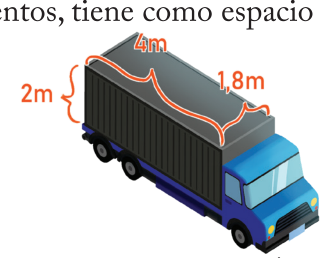
- ¿Cómo se define la capacidad de un recipiente?
- ¿Cuál es la unidad de medida de la capacidad, de acuerdo con el *Sistema Internacional de Unidades*?
- ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos de esta unidad de medida?
- ¿Qué otras medidas de capacidad se utilizan, en República Dominicana?
- ¿Cuál es la unidad de medida del volumen de un cuerpo, de acuerdo con el *Sistema Internacional de Unidades*?
- Un acuario tiene lados y base con un espesor de 4 *mm*.



Calcula su capacidad máxima.

- ¿Cuál es la capacidad de una caja, cuyo espacio interior forma un cubo de lado 15 cm?

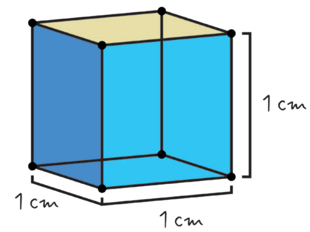
- Un camión, diseñado para el transporte refrigerado de alimentos, tiene como espacio interior de carga el que se indica en la imagen.



Fuente: Freepik

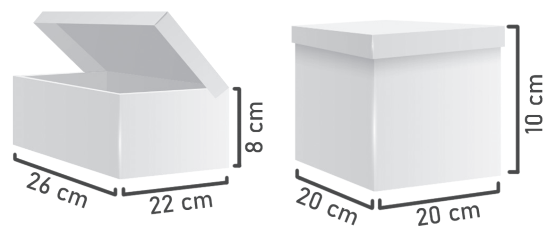
¿Cuál su capacidad máxima?

- 9. Se ha construido un cubo sólido de 1 cm de lado.



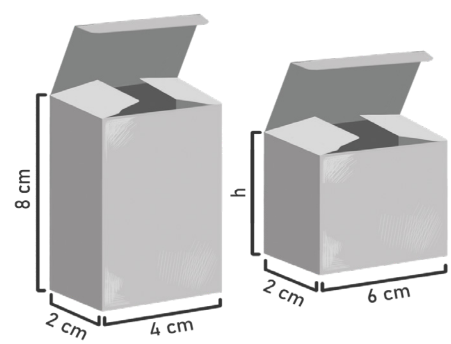
¿Tiene capacidad? Argumenta tu respuesta y discútela con el docente.

- Observa las siguientes cajas.



Sin realizar cálculos, ¿cuál tiene mayor capacidad? Haz los cálculos ahora y compara con tu respuesta anterior.

- Se ha diseñado un empaque como el que se muestra en la imagen izquierda.



Los datos señalados se corresponden con su espacio interior.

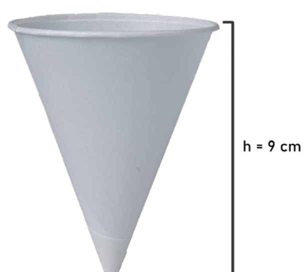
Ahora bien, se desea diseñar otro (observa la imagen de la derecha), también con forma de paralelepípedo, cuyo espacio interior tenga una base de lados de 2 *cm* y 6 *cm*.

¿Cuál debe ser su altura h, para que la capacidad de ambas cajas sea igual?

- De un tanque esférico para reservar agua, solo se conoce la medida que se indica en la figura anexa.

¿Es posible estimar su capacidad solo con esa información? De ser posible, calcula su capacidad; y de no ser posible, explica por qué. Discute tus ideas con tus compañeros y el docente.

- Un vaso para servir agua tiene forma de cono. Se sabe que su altura es de 9 cm. y el diámetro de su base es de 7 cm.



¿Es posible estimar su capacidad? En ese caso, ¿cuál es?

- Se han preparado 3 pintas de helado. ¿Cuántos conos de helado pueden servirse con estas, si en cada uno de ellos se verterá una onza fluida del producto?

- ¿Por qué el tanque de gas, de uso doméstico, expone su capacidad en kilogramos y no en litros?

- ¿A cuántos litros equivalen 835 mililitros?

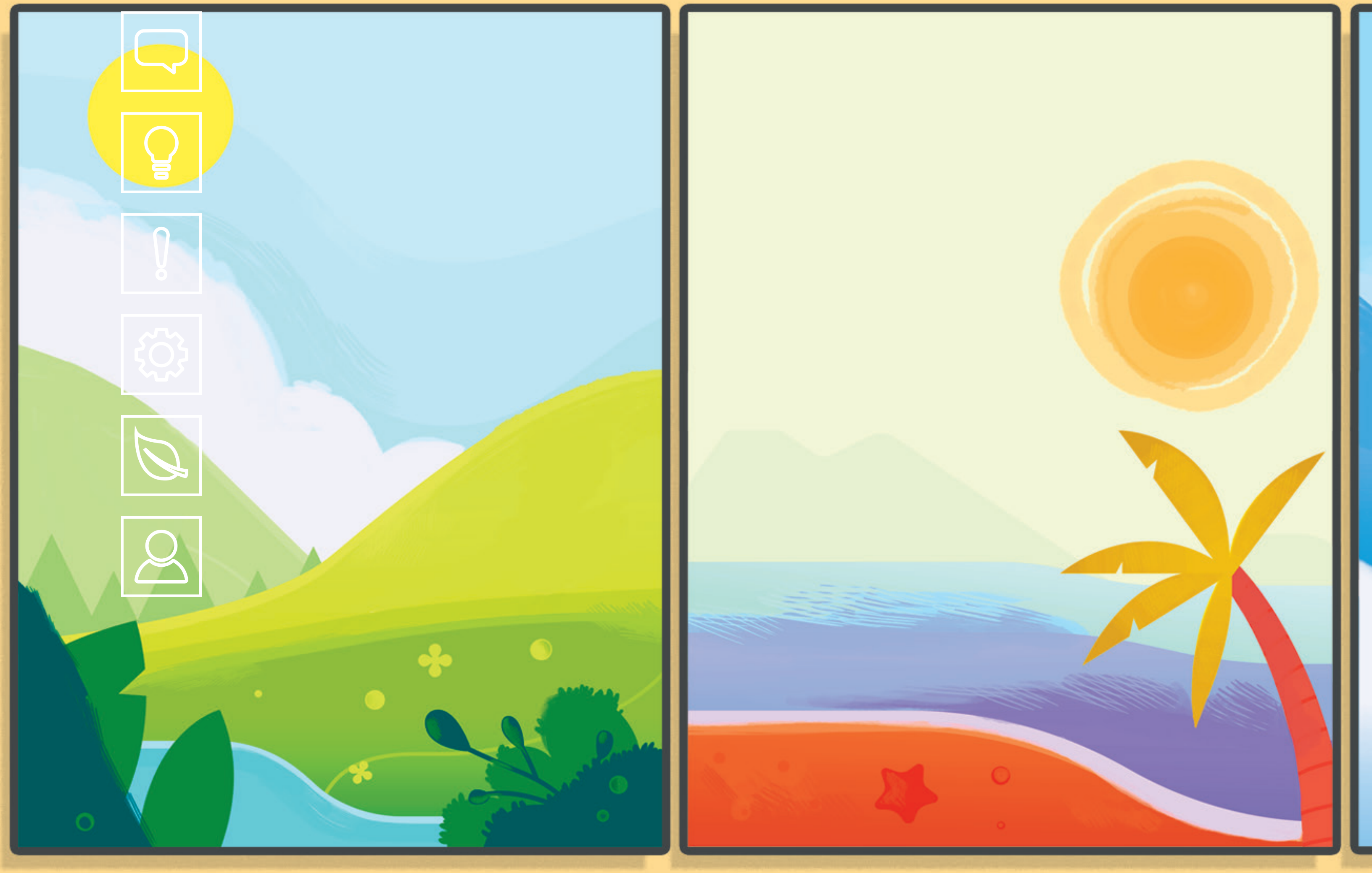
- ¿A cuántos decilitros equivalen 2 litros?

- ¿Cuántas onzas fluidas hay en 2.5 galones?

- Una pinta de helado se servirá en tazas. ¿Cuántas tazas pueden servirse?

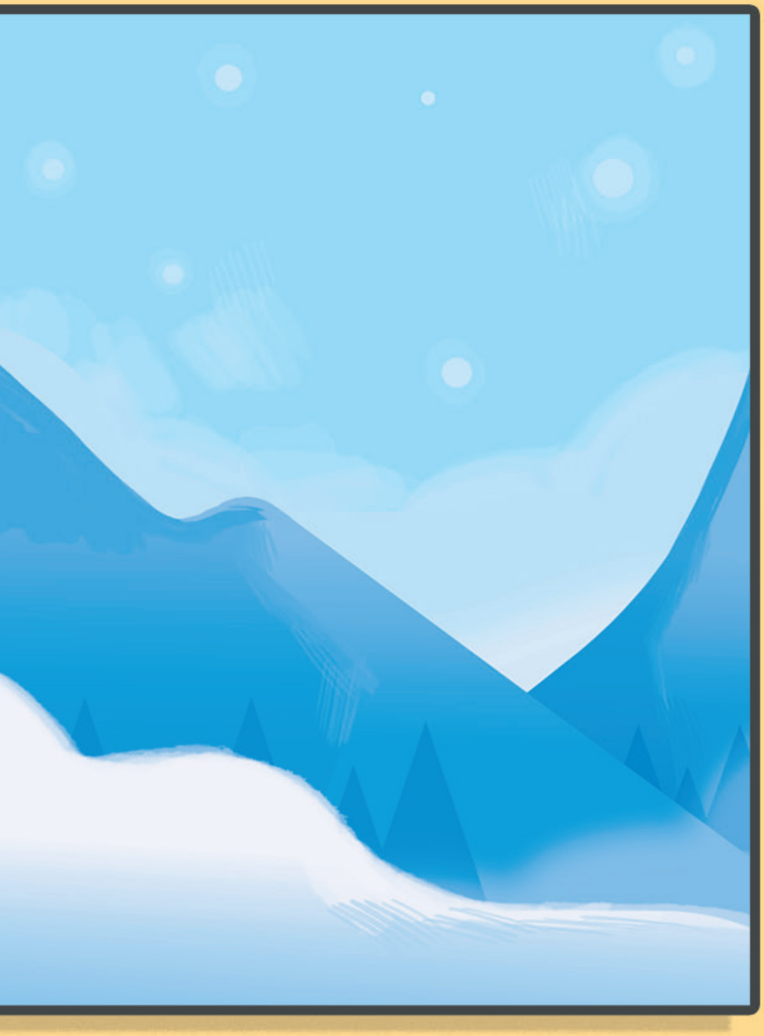
- Haz una lista con los usos de la onza fluida, la taza, la pinta y el galón. Para ello es importante consultar con tus familiares (tíos, abuelos, y otros).

- Diseña un experimento, para determinar cuántos vasos con capacidad para 200 cc pueden llenarse con un galón de líquido. Comparte tus ideas con el docente y tuscompañeros.



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.



Unidad 11

La temperatura

Situación de aprendizaje

En la vida diaria se ven situaciones, ambientes y objetos donde se aprecian temperaturas bajas, medias o altas.

Observa las imágenes y responde:

¿Cuál de los tres ambientes de las imágenes tendrá una temperatura baja?

¿Cuál de los tres ambientes de las imágenes tendrá una temperatura media?

¿Cuál de los tres ambientes de las imágenes tendrá una temperatura alta?

¿Con que instrumento se puede medir la temperatura ambiental?

¿Cómo se puede registrar la temperatura en un ambiente determinado?

Contenido

- Calor y temperatura
- Escalas de temperatura: Celsius y Fahrenheit
- Medición y conversión de unidades de temperatura
- Temperatura de congelación y de ebullición del agua
- La temperatura en la vida cotidiana
- Actividad grupal
- Evaluación

Calor y temperatura

Aa

Una **molécula** viene a ser la porción de materia más pequeña que aún conserva las propiedades de la materia original.

¿Cuál es la diferencia entre calor y temperatura?

La temperatura es un concepto que se puede entender a través de la experiencia. En la actualidad, se observa su aplicación en diferentes contextos: en aparatos electrónicos como los celulares y tablets, en el registro de las temperaturas de las ciudades, cuando un médico examina y mide la temperatura corporal de un paciente, entre otros.

Cuando una persona está en contacto con un objeto, puede decir si esta frio o caliente.

El frío es la ausencia de calor. En otras palabras, significa que el frío no existe, pues se refiere al nivel de energía o, en un caso extremo, a la ausencia total de ella.

Conoce las diferencias entre calor y temperatura

El **calor** es la cantidad de energía térmica generada por el movimiento de las **moléculas** de un cuerpo.

La **temperatura** es la medida de calor de un cuerpo. Esta se mide con un termómetro y su unidad de medida son los grados Celsius, grados Fahrenheit y grados Kelvin.

En el siguiente cuadro, se observan las principales diferencias entre calor y temperatura.

Calor	Temperatura
Es el movimiento o intercambio de energía entre cuerpos.	Es la medida de la cantidad de calor que hay en un cuerpo.
Se transfiere de un cuerpo de mayor temperatura a un cuerpo de menor temperatura.	No se transfiere, solo se mide.
Se mide con un instrumento llamado calorímetro.	Se mide con un termómetro.
Unidades de medida: Calorías, Joules y Kilocalorías.	Unidades de medida: grados Celsius, Fahrenheit y Kelvin.

El contacto térmico es el contacto físico que permite una transferencia de calor relativamente rápida.
En el siguiente video conseguirás complementar información acerca del calor y la temperatura.

https://www.youtube.com/watch?v=GsK4x5w1XnM

Para medir la temperatura de un objeto o un sistema usando un termómetro, éste debe colocarse en contacto térmico con el objeto o el sistema. El calor se transferirá: desde el objeto o sistema hacia el termómetro o desde el termómetro hacia el objeto o sistema hasta que tengan la misma temperatura.

Ejemplo:

En la playa, María dejó su bolso expuesto directamente al sol con una botella de agua y sus llaves. Al cabo de tres horas, el interior del bolso alcanzó una temperatura de 40 °C.

¿Qué sucedió con la temperatura de los objetos dentro del bolso?

Respuesta: todos tienen la misma temperatura, ya que el calor en el interior del bolso se va a transferir a los objetos (agua y llaves) hasta que todos estén a la misma temperatura.

- Si se considera a las temperaturas bajas como aquellas donde hay menos medida de calor y temperaturas altas donde hay más medida de calor, completa en tu cuaderno la siguiente tabla con una situación o el nivel de temperatura según corresponda.

Situación	Nivel de temperatura
Un helado de chocolate	
	Alta
Lava de un volcán en erupción	
	Baja
Polo norte	

- Qué relación existe entre la desforestación y el aumento de la temperatura ambiental.
- En República Dominicana las temperaturas medias oscilan entre los 26 y 28 grados Celsius; sin embargo, hay zonas de la isla donde la escala termométrica registra temperaturas más calientes o más frías que las medias. Aunque es un país tropical, hay localidades a las cuales es recomendable ir abrigados en algunos meses del año. Investiga cuáles localidades han registrado las mayores y menores temperaturas en nuestro país y en qué meses del año. Luego, comparte y comenta con dos de tus compañeros los resultados de tu investigación. ¿Estuvieron todos de acuerdo con los resultados? ¿Cómo valoras las respuestas dadas por tus compañeros?

Constanza es el territorio más frío de la República Dominicana y de todo el Caribe. Y es que esta ciudad está caracterizada por tener clima templado con temperaturas frescas y lluvias durante todo el año.

En el siguiente enlace encontraras información sobre la ciudad de Constanza.

https://www.youtube.com/watch?v=2OQreX49G8A

Si se coloca un objeto caliente en contacto con uno frio, el caliente se enfría y el frio se calienta, pero al cabo de un tiempo, ambos estarán a la misma temperatura.

- Aplica en el marco de la ética ciudadana los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadística de números naturales y enteros para contribuir con la preservación del medio ambiente y la toma de decisiones en favor de la comunidad, respetando las diferencias de opiniones de los demás.

Escalas de temperatura: Celsius, Fahrenheit y Kelvin

Presión atmosférica: presión que ejerce la atmosfera que rodea la tierra sobre todos los objetos que se hayan en contacto con ella.

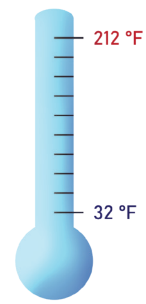
Fuente: Wikipedia

¿Cuál es la temperatura normal del cuerpo humano?

Conoce las escalas de temperatura

Las medidas de temperatura pueden realizarse usando diferentes escalas. Hay tres escalas comúnmente usadas para medir la temperatura: **la escala Fahrenheit, la escala Celsius y la escala Kelvin**.

La escala de temperatura Fahrenheit (°F) fue propuesta en 1724 por Daniel Gabriel Fahrenheit, físico e ingeniero polaco. Fahrenheit también inventó el termómetro de mercurio. La escala establece como temperatura de congelación del agua 32 °F y como temperatura de ebullición del agua 212 °F.

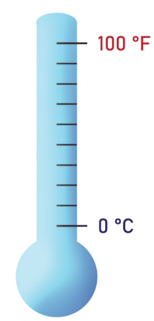


Fahrenheit

Esta escala se utilizaba en la mayoría de los países de habla inglesa y en Puerto Rico para todo tipo de uso. Actualmente, los Estados Unidos todavía mantiene la escala Fahrenheit y también en determinadas industrias, como la del petróleo.

Además, se sigue utilizando en meteorología, por ejemplo, cuando se predicen condiciones climáticas en los noticieros y en la gastronomía, por ejemplo, en algunos dispositivos, como hornos, estufas, gratinadoras, entre otras, que están graduados en esta escala.

La escala de temperatura Celsius (°C) fue propuesta en 1742 por Andrés Celsius, astrónomo sueco. Comúnmente, esta escala es llamada ***escala centígrada*** y establece como temperatura de congelación del agua 0 °C y como temperatura de ebullición del agua 100 °C. Esta escala se utiliza en la mayoría de los países del mundo para expresar las temperaturas de uso cotidiano, desde la temperatura del aire a la de una gran cantidad de dispositivos domésticos: hornos, freidoras, calentador de agua, refrigeración, entre otros.



Celsius

La escala de temperatura Kelvin (K) fue propuesta en 1848 por William Thomson (Lord Kelvin), físico inglés. Esta escala está basada en la existencia del cero absoluto, la temperatura mínima posible. El

¿Cuál de las siguientes temperaturas es la menor?
a. 32 °F

b. 0 °C

c. 0 K

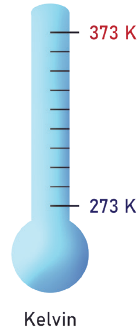
Algunos estudios han mostrado que la temperatura corporal "normal" puede tener un amplio rango que va desde los 97 °F (36.1 °C) hasta los 99 °F (37.2 °C).

Practica las conversiones de unidades de temperatura

https://www.cerebriti.com/juegos-de-ciencias/grados-celsius--farenheit-y-kelvin

kelvin se usa a menudo en la ciencia y en la tecnología, pero en realidad no se utiliza tanto en la vida cotidiana.

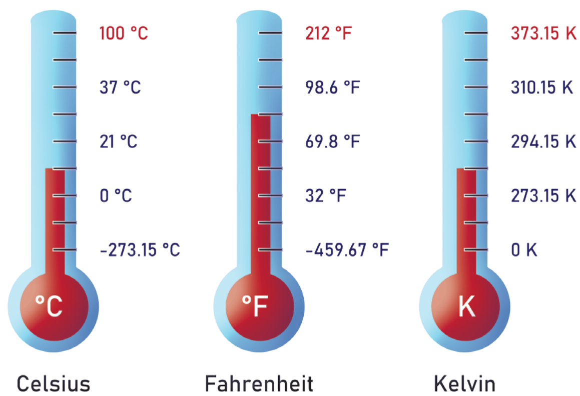
El Kelvin es la unidad base de temperatura en el Sistema Internacional de Unidades (SI). El grado Celsius es en la actualidad una unidad de temperatura derivada del sistema SI, siendo el Kelvin la unidad base.



Se conoce como el Sistema Internacional de Unidades (abreviado SI) al sistema de unidades de medición empleado en prácticamente todo el mundo. Es utilizado en la fabricación de los instrumentos de medición para su uso tanto especializado como cotidiano.

Compara las escalas de temperatura

La imagen ilustra una comparación entre las escalas de temperatura sobre algunos valores comunes. Se sabe que, la temperatura ambiente varía y la temperatura del cuerpo humano no siempre es de 37 °C (98.6 °F). Además, el punto de ebullición del agua depende de la **presión atmosférica** y no siempre es exactamente de 100 °C (212 °F).



- Según la imagen de comparación de las escalas de temperatura, **ordena** de menor a mayor las siguientes temperaturas:
  - 32 °F, 21 °C, 69.8 °F,
  - 37 °C, 212 °F, 273.15 K.
  - 98.6 °F, 100 °C, 37 °C .
  - 37 °C, 32 °F, 96.6 °F.
- En República Dominicana los meses de diciembre y enero son los más fríos, mientras que los meses de julio y agosto son los más cálidos. **Investiga** lo siguiente y **responde**.
  - Las temperaturas promedio en tu localidad para los meses de diciembre y enero del año 2022, expresadas en °C.
  - Las temperaturas promedio en tu localidad para los meses de julio y agosto del año 2022, expresadas en °C.

- Formula y resuelve problemas de la cotidianidad que involucran comparación y conversión de unidades de temperatura.
- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del sistema métrico decimal (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el sistema inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos, volumen, capacidad y temperatura en las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Medición y conversión de unidades de temperatura

El primer termómetro del cual se tiene registro fue inventado por Galileo Galilei en 1592, llamando a su invención termoscopio.

Fuente: https://humanidades.com/temperatura/

Termómetro digital.

Termómetro infrarrojo

Imagen de un termómetro con escala principal de grados Fahrenheit y escala secundaria en grados Celsius.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Grado_Fahrenheit

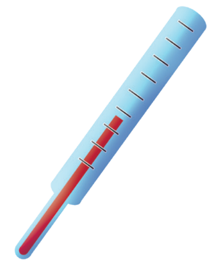
Complementa información acerca de cómo se miden las temperaturas en el siguiente enlace:

https://edu.gcfglobal.org/es/unidades-de-medida/como-se-mide-la-temperatura/1/#

¿Qué instrumento se utiliza para medir la temperatura?

Mide la temperatura

Un termómetro es un instrumento que sirve para medir la temperatura. Desde su invención ha tenido una gran evolución: desde el primer termómetro de mercurio, inventado por Fahrenheit, hasta los más modernos, como los termómetros digitales y los de rayos infrarrojos. También existe el termómetro con escala principal de grados Fahrenheit y escala secundaria en grados Celsius.



Convierte unidades de temperatura

En la siguiente tabla, se muestran las conversiones entre las diversas escalas de temperatura.

Conversión	Fórmula
°F a °C	$°C = \frac{°F - 32}{1.8}$
°C a °F	$°F = 1.8 \cdot °C + 32$
°C a K	$K = °C + 273.15$
K a °C	$°C = K - 273.15$

Problema 1: la temperatura en el parque Duarte es de **23.89** °C¿Cuál es la temperatura en el parque Duarte en la escala Fahrenheit y Kelvin?

Solución: usando la formula °F = 1.8 · °C + 32, se puede convertir la temperatura del parque Duarte de grados Celsius a grados Fahrenheit.

$$°F = 1.8 \cdot \mathbf{23.89} + 32 = 75$$

La temperatura en el parque Duarte en la escala Fahrenheit es de 75 ^{0}F.

Usado la fórmula K = °C + 273.15, se puede convertir la temperatura del parque Duarte en grados Kelvin.

$$K = °C + 273.15 = 23.89 + 273.15 = 297.04$$

La temperatura en el parque Duarte en la escala Kelvin es de 297.04 K.

Usado la fórmula K = ˚C + 273.15, se puede convertir la temperatura del parque Duarte en grados Kelvin.

$$K= {}^{\circ}C + 273.15=23.89+273.15=297.04$$

La temperatura en el parque Duarte en la escala Kelvin es de 297.04 K.

Problema 2: un grupo de turistas que visitó las Aguas Termales de Canoa, provincia Barahona, al llegar al lugar midieron la temperatura del agua en una de las pozas con un termómetro graduado en la escala de Fahrenheit y este registró una temperatura de 104 ˚F. ¿Cuál será su equivalencia en la escala Celsius?

Aguas Termales de Canoa, provincia Barahona.

Solución: usando la fórmula $^{\circ}C = \frac{^{\circ}F - 32}{1.8}$, se puede convertir la temperatura de grados Fahrenheit a grados Celsius.

$$^{0}C = \frac{104-32}{1.8}$$

$$^{0}C = \frac{72}{1.8}$$

$$^{0}C = 40$$

La equivalencia en la escala Celsius es de 40 ^{0}C.

- La temperatura en el salón de clases es de 24 ˚C ¿Cuál es la temperatura en el salón de clases en la escala Fahrenheit?
- Un termómetro **marca** la temperatura corporal de un niño con fiebre en 102 ˚F. ¿Cuál es la temperatura del niño en la escala Celsius?
- **Convertir** a ˚C las siguientes temperaturas:
  - 288 ˚F
  - 30 ˚F
- **Completar** la siguiente tabla:

°F	°C
32	0
	136
59	
	100
	-196
12,000	

¿Cuál de las siguientes temperaturas es mayor?

a. 77 °F

b. 59 ºC

c. -37 ºC

d. 0 ºC

- Formula y resuelve problemas de la cotidianidad que involucran comparación y conversión de unidades de temperatura.
- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del sistema métrico decimal (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el sistema inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos, volumen, capacidad y temperatura en las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Las **propiedades físicas** incluyen color, densidad, dureza y puntos de fusión y ebullición.

1 atm: es la unidad del sistema internacional de unidades con que se mide la presión y es equivalente a la presión que ejerce la atmósfera terrestre sobre cualquier cuerpo a nivel del mar.

Agregar sal al agua tiene un efecto: incrementa el punto de ebullición, que es cuando pasa a un estado gaseoso. De esta manera, el agua tendrá una temperatura más elevada al agregar el alimento y se cocinaría mejor. El agua salada requiere una mayor temperatura que el agua sin sal para que se produzca este proceso de pasar de estado líquido a gaseoso. No obstante, echar un poco de sal en el agua fría para la cocción no significa que esta vaya a hervir más rápido.

Temperatura de congelación y de ebullición del agua

¿Qué crees que pasa con el punto de ebullición del agua si le añades sal antes de hervirla?

Conoce algunas características del punto de ebullición y punto de congelación del agua

El punto de ebullición del agua es la temperatura donde ella pasa del estado líquido al gaseoso y el punto de congelación del agua es la temperatura en la cual ella pasa de estado líquido al estado sólido.

La escala de temperatura Celsius (°C) establece que el **punto de congelación** del agua es 0 °C y su **punto de ebullición,** a la presión atmosférica estándar, es de 100 °C.

Esto puede variar mucho en los casos en que el agua tenga otras sustancias disueltas en ella, líquidas o sólidas, como ocurre con el agua del mar, rica en sales, lo cual modifica sus **propiedades físicas**.

Problema 1: Gabriela va a cocinar espagueti y pone a hervir una olla con agua a la cual le coloca una cucharada de sal. Luego, se da cuenta de que ha pasado más tiempo de lo normal para que el agua hierva y decide, por curiosidad, medir con termómetro la temperatura del agua que en ese momento ha comenzado a hervir. La temperatura registrada es de 104.8 °C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura en el punto de ebullición normal del agua según el registró del termómetro de Gabriela?, ¿por qué crees que ocurre esto?

Solución: sabemos que la temperatura de ebullición del agua es de 100 °C y la lectura del termómetro es de 104.8 °C, por lo que su diferencia viene dada por: 104.8-100=4.8. Por eso, la diferencia de temperatura en el punto de ebullición del agua es de 4.8 ° C. Esto ocurre, porque al añadir sal al agua se modifican sus propiedades físicas, entre ellas el punto de ebullición.

Problema 2: la temperatura más baja que se ha registrado en República Dominicana ocurrió en el Pico Duarte y fue de -5 °C ¿Cuánto es su equivalencia en la escala Fahrenheit?

Fuente: Pico Duarte Tours

Solución: usando la formula °F =1.8 · °C + 32 se puede convertir la temperatura de grados Celsius a grados Fahrenheit

$$°F = 1.8 \cdot (-5) + 32$$

$$°F = -9 + 32$$

$$°F = 23$$

La equivalencia en la escala Fahrenheit es de 23 °F

- En la siguiente tabla, se presenta el punto de ebullición de algunas sustancias en °C a 1 atm. En tu cuaderno, **completa** la columna en °F.

Sustancia	Punto de ebullición en °C	Punto de ebullición en °F
Agua	100	
Etanol	78	
Agua con sal	102	
Agua con azúcar	101	
Vinagre	118	
Oxigeno	182.9	
Nitrógeno líquido	-196	
Helio líquido	-269	

- Una familia **planificó** ir a la playa el día 04 del mes de mayo del 2023, y quiere seleccionar la playa con la temperatura más alta del agua. Si para ese día, según datos del instituto meteorológico, la temperatura del agua en Punta Cana será de 75.74 °F y en Puerto Plata de 26.7 °C, ¿cuál lugar seleccionará la familia? Justifica la respuesta.

- La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera a razón de 9 °C cada 300 metros. ¿A qué altura vuela un avión si la temperatura del aire ha variado -81 °C y en la tierra teníamos una temperatura de 27 °C?

¿Por qué un chef de cocina al preparar los vegetales para algunos platos, los hierve por un corto tiempo y luego los saca de la olla y los sumerge en agua helada?

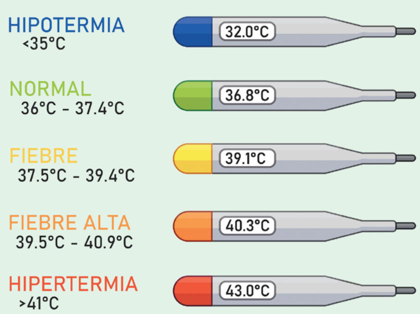
El hielo tiene múltiples beneficios para la belleza: ayuda a mejorar la circulación, disminuir la aparición de arrugas, alivia el dolor y el enrojecimiento causado por el acné, reduce las ojeras y la hinchazón.

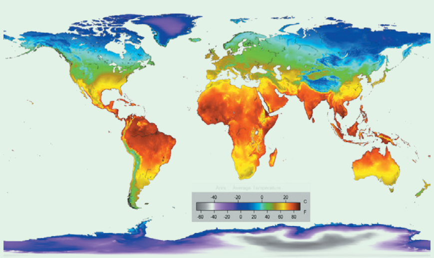
- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del sistema métrico decimal (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el sistema inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos, volumen, capacidad y temperatura en las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Aa

Antipirético: es un fármaco que hace disminuir la fiebre. Es un medicamento que trata la fiebre de una forma sintomática, sin actuar sobre su causa.

Diagnóstico médico según la temperatura corporal.





Mapa de la temperatura media anual a nivel global

Fuente: Wikipedia
https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuador_t%C3%A9rmico

La temperatura en la vida cotidiana

¿Dónde usamos la temperatura en la vida cotidiana?

La temperatura y la cocina

La temperatura y el tiempo juegan un papel muy importante en la preparación de los alimentos, la cocción puede variar en función del tipo, el peso, el tamaño y la calidad del alimento. Podemos ver en las recetas que siempre indican el tiempo y la temperatura para la cocción o para refrigeración.

Problema 1: María está cocinando un bizcocho y en la receta se indica que la temperatura de cocción es de 180 ˚C por 40 min, pero, su horno está expresado en ˚F. ¿A qué temperatura debe colocar el horno para que en 40 min su bizcocho esté perfectamente horneado?

Solución: se debe realizar una transformación de unidades en la temperatura de ˚C a ˚F, usado la fórmula ˚F = 1.8 · ˚C + 32

$$^\circ F = 1.8 \cdot (180) + 32$$

$$^\circ F = 324 + 32$$

$$^\circ F = 356$$

El horno se debe colocar a una temperatura de 356 ^{0}F.

La temperatura y la medicina

La temperatura corporal "normal" puede tener un amplio rango de valores, que puede variar desde los 36.1 ˚C hasta los 37.2 ˚C. Una temperatura de más de 38 ˚C casi siempre indica que la persona tiene fiebre a causa de una infección o enfermedad.

Problema 2. Amaury fue al hospital, porque se sentía mal y el médico le recetó un antipirético, en caso de tener fiebre. Si al tomarle la temperatura el termómetro arrojó un valor de 101 ˚F, ¿debe tomarse Amaury el antipirético?

Solución: se debe realizar una transformación de unidades en la temperatura de ˚F a ˚C, usando la fórmula $^0C = \frac{^0F - 32}{1.8}$

$$^0C = \frac{101 - 32}{1.8} = \frac{69}{1.8} = 38.3$$

Amaury debe tomarse el antipirético, ya que su temperatura es de 38.3 ºC y tiene fiebre.

La temperatura atmosférica y el clima

La temperatura es el elemento del clima que se refiere al grado de calor específico del aire en un lugar y momento determinado. La temperatura atmosférica define los tipos de clima y las estaciones del año. Por ejemplo, en la estación de invierno tenemos las temperaturas más bajas y en la de verano las temperaturas más altas.

Problema. En la ciudad de Constanza, a las 7:00 am el termómetro marca – 4 °C, a las 11:00 am la temperatura sube 9 ^{0}C y desde las 11:00 am hasta las 10:00 pm, la temperatura baja 7 ^{0}C. ¿Cuál es la temperatura a las 10:00 pm?

Solución: se organizan los datos de la siguiente manera.

$$T = -4\,^{\circ}C + 9\,^{\circ}C - 7\,^{\circ}C$$

$$T = 5\,^{\circ}C - 7\,^{\circ}C$$

$$T = -2\,^{\circ}C$$

A las 10 pm de la noche la temperatura es de – 2 °C.

- A las 10:00 am el termómetro marca 11°C y desde esa hora hasta las 9:00 pm la temperatura ha bajado 16°. ¿Qué temperatura hay a las 9:00 pm?
- Ramona **tiene** a su hijo Raúl enfermo y le mide la temperatura con un termómetro digital, el cual marca 100 °F. ¿Se puede decir que Raúl tiene fiebre?, sabiendo que se considera fiebre más de 38 °C.
- A las 8:00 a.m. el termómetro marca -5 °C, a las 11:00 am la temperatura sube 10 °C y desde las 11:00 am hasta las 11:00 pm, la temperatura baja 8 °C ¿cuál es la temperatura a las 11:00 pm?
- Sebastián **está** horneando un pollo y en la receta se indica que la temperatura de cocción es de 200 °C, pero, su horno está expresado en °F. ¿A qué temperatura debe colocar el horno para obtener lo indicado en la receta?

Clima y previsión meteorológica mensual.
Las Tablas, República Dominicana

- Formula y resuelve problemas de la cotidianidad que involucran comparación y conversión de unidades de temperatura.
- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del sistema métrico decimal (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el sistema inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos, volumen, capacidad y temperatura en las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Actividad grupal

Medir, leer e interpretar temperaturas en un termómetro

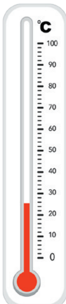


Figura 1.

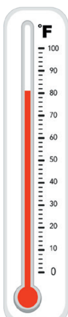


Figura 2.

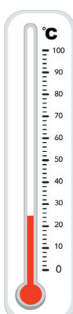


Figura 3.

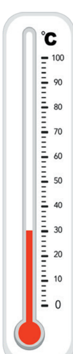


Figura 4.

¿Qué haremos?

Resolver problemas en forma colaborativa, para practicar cómo medir, leer e interpretar temperaturas en un termómetro.

¿Qué necesitamos?

Lápiz, papel, calculadora y libro de texto.

¿Cómo nos organizamos?

Formar equipos de 3 integrantes, donde todos tendrán igual responsabilidad para la resolución de los problemas.

¿Cómo lo haremos?

Resolver uno a uno los problemas. El equipo tiene que llegar a un consenso. Es decir, negociar hasta que se llegue a una conclusión que satisfaga a todos los integrantes del grupo.

Lista de problemas:

- El pronóstico de la máxima temperatura en la ciudad de San Francisco de Macoris para el día de hoy es de 26 °C. En la figura 1, se muestra el termómetro ubicado en el patio de una escuela de esa ciudad. Completa la siguiente frase.

  En el patio de la escuela la temperatura es ____ °C más cálida que la temperatura pronosticada.

- Daniel quiere ir a playa Sosua, pero quiere esperar hasta que la temperatura baje a 28 °C. El termómetro muestra la temperatura actual (figura 2). ¿Cuántos grados tiene que bajar la temperatura antes que Daniel vaya a playa Sosua?

- A las 4:00 pm en la ciudad de San Cristóbal la temperatura es de 88.7 °F y a las 10:00 pm la temperatura es la que muestra el termómetro de la figura 3. ¿Cuál fue la variación de temperatura en la Ciudad de San Cristóbal?

- En la escuela de Ramón se tiene por norma suspender las clases si la temperatura supera la que se muestra en el termómetro de la figura 4. ¿Qué temperatura haría que se suspendieran las clases en la escuela de Ramón?

a. 38 °C   b. 40 °C   c. 42 °C   d. 42 ⁰C

- A las 10:00 am la temperatura en la ciudad de Nagua era de 24 °C y a las 2:00 pm había subido a 6 °C. Seleccionen en la figura 5, el termometro que muestra la temperatura a esa hora.
- La temperatura dentro del aula de José es 6 °C más fría que la temperatura fuera de su aula que es de 32 °C. Seleccionen en la figura 6, el termometro que muestra la temperatura del aula.
- A Trina le gusta correr cuando la temperatura está entre 70 °F y 77 °F. Seleccionen en la figura 7, el termómetro que marca una temperatura en la que a Trina le gustaría salir a correr.

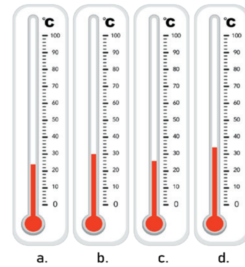


Figura 5.

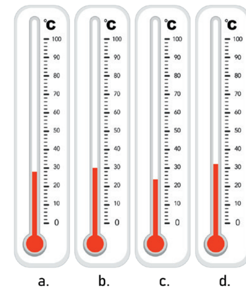


Figura 6.

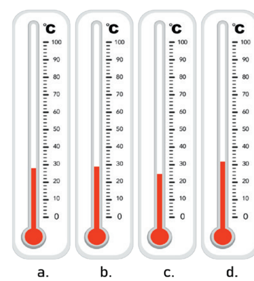


Figura 7.

Presentación y socialización de la actividad

Elaboren una presentación en PowerPoint, en donde expliquen cada uno de los pasos que los llevó a la resolución de cada problema. Luego compartan el resultado de este trabajo con toda la clase.

Coevaluación

Cada miembro del equipo escoge a otro compañero y describe brevemente: cómo contribuyó al trabajo del equipo y qué debe mejorar, para próximas actividades colaborativas.

Autoevaluación

Una vez que hemos finalizado la tarea, es un buen momento para reflexionar sobre nuestro aprendizaje.

¿Qué he aprendido?

¿Qué me ha sorprendido más de todo el proceso? ¿Por qué?

¿He cambiado alguna idea previa? ¿Cuál?

¿Qué me ha resultado más difícil? ¿Por qué?

- Interpreta y plantea soluciones sobre situaciones del contexto comunitario en la que se pongan de manifiesto sus conocimientos sobre las unidades del sistema métrico decimal (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro) y el sistema inglés (milla, yarda, pie, pulgada) y los aplica al cálculo de medidas de longitud de circunferencia, perímetro y área de polígonos, volumen, capacidad y temperatura en las escalas Celsius y Fahrenheit

Evaluación

- ¿En qué mes del año se registran las temperaturas más bajas en la ciudad de Santo Domingo?
- Si se consideran temperaturas bajas para aquellas donde hay menos medida de calor y temperaturas altas donde hay más medida de calor. Para cada caso completa en el recuadro azul la información solicitada.

Objeto, situación o lugar	Nivel de temperatura
Paleta de batata y coco	
	Alta
Agua hirviendo	
	Baja
Constanza	

- Ordena de menor a mayor las siguientes temperaturas:
  - 32 °F, 22 °C, 70 °F
  - 36 °C, 210°F,
  - 90 °F, 104 °C, 35 °C
  - 0 °C, 32 °F, 90 °F
- ¿Cuál fue la temperatura promedio en tu localidad en el mes de diciembre del año 2022? Expresadas en ^{0}C.
- ¿Cuál fue la temperatura promedio en tu localidad en el mes de agosto del año 2022? Expresadas en °F.
- La temperatura en el salón de clases es de 25 °C¿Cuál es la temperatura en el salón de clases en la escala Fahrenheit?
- Un termómetro marca la temperatura de un niño enfermo en 98.5 °F. ¿Cuál es la temperatura del niño en la escala Celsius?
- Convertir a ^{0}C las siguientes temperaturas:
  - 290 °F
  - -5 °F
  - -15 °F
  - 14°F
- Ordena de menor a mayor las siguientes temperaturas:
  - 32 ^{0}F, -21 ^{0}C, -15 ^{0}F, 36 ^{0}C, -4 ^{0}F
  - 20 ^{0}F, -10 ^{0}C, 35 ^{0}C, 0 ^{0}C, -9 ^{0}F
- La temperatura en el agua de la playa en Puerto Plata es de 74.72 ^{0}F ¿Cuál es la temperatura del agua de la playa en Puerto Plata en la escala Fahrenheit?
- En la siguiente tabla ¿qué números completan los recuadros de color azul?

°F	°C
32	
	134
60	
	104
	-198
11,000	

De la pregunta 12 hasta la 19 sselecciona la respuesta correcta en cada caso.

- Si en Constanza a las 5 de la mañana el termómetro marca –2 grados y a las 2 de la tarde está marcando 18 grados ¿Cuál es la diferencia de temperatura?
  - 16
  - –20
  - 20
  - –16.
- ¿Cuál es la unidad base de temperatura en el sistema SI (Sistema Internacional de Unidades)?
  - K
  - °C
  - °F
  - °R
- ¿Cuál es la temperatura de congelación del agua?
  - 100 °C
  - 101 °C
  - 0 °C
  - -5 °C

- ¿Cuál es la temperatura de ebullición de agua con sal?

  • 100 °C • 101°C • 102 °C • 118 °C

- La temperatura de 0 ^{0}C equivale a:

  • 0 K • 32 k • 32 °F • 0 °F

- ¿Cuál es la solución correcta de –2 ^{0}F+(–6 ^{0}F)?

  • 8 °F • –8 °F • –4 °F • 4 °F

- ¿Cuál es la solución correcta de (1ºC-4ºC)2?

  • –4 °C • –5 °C • 6 °C • –3 °C

- La temperatura en la cima del Pico Duarte a las 2:00 de la mañana era de -4 grados centígrados. A las 9 de la mañana era de 17 grados, pero durante una fuerte lluvia a las 12 del mediodía la temperatura descendió 10 grados. ¿Cuál fue la variación entre las 2:00 de la mañana y las 12 del mediodía?

  • 13 • 22 • 3 • 32

- Un grupo de amigos planificó ir a la playa el día 05 del mes de mayo del 2023. Y seleccionó el lugar con la temperatura más alta en el agua de la playa. Si ese día la temperatura del agua de la playa en Punta Cana era de 74.74 °F y en Cabarete era de 26.7 °C, ¿Cuál lugar seleccionó la familia? Justifica la respuesta.

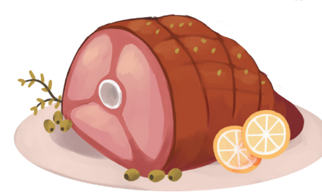
- Amaury está en su clase de cocina y el profesor le explica que, para cocinar vegetales como brócoli, zanahoria, coliflor, vainitas, etc. se deben sumergir en agua a una temperatura de 110 °C por un tiempo de 4 minutos y luego pasarlos inmediatamente a un tazón con agua con hielo a una temperatura de 5 °C. para que conserven su color y queden con una textura crujiente. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre ambos procesos?

- En Puerto Plata a las 10:00 am el termómetro marca 28 °C y desde esa hora hasta las 10:00 pm la temperatura ha bajado 3°. ¿Qué temperatura hay a las 10:00 pm?

- Si la la temperatura corporal "normal" puede tener un amplio rango que va desde los 36.1 °C hasta los 37.4 °C y Mabel tiene a su hijo Santiago enfermo al cual le mide la temperatura con un termómetro digital y marca 101 °F. ¿Se puede decir que Raúl tiene fiebre?

- En la ciudad de Constanza a las 9:00 am el termómetro marca -4 °C a las 10 am la temperatura sube 9 ^{0}C y desde las 10:00 am hasta las 10:00 pm la temperatura baja 8 °C. ¿Cuál es la temperatura a las 10:00 pm?

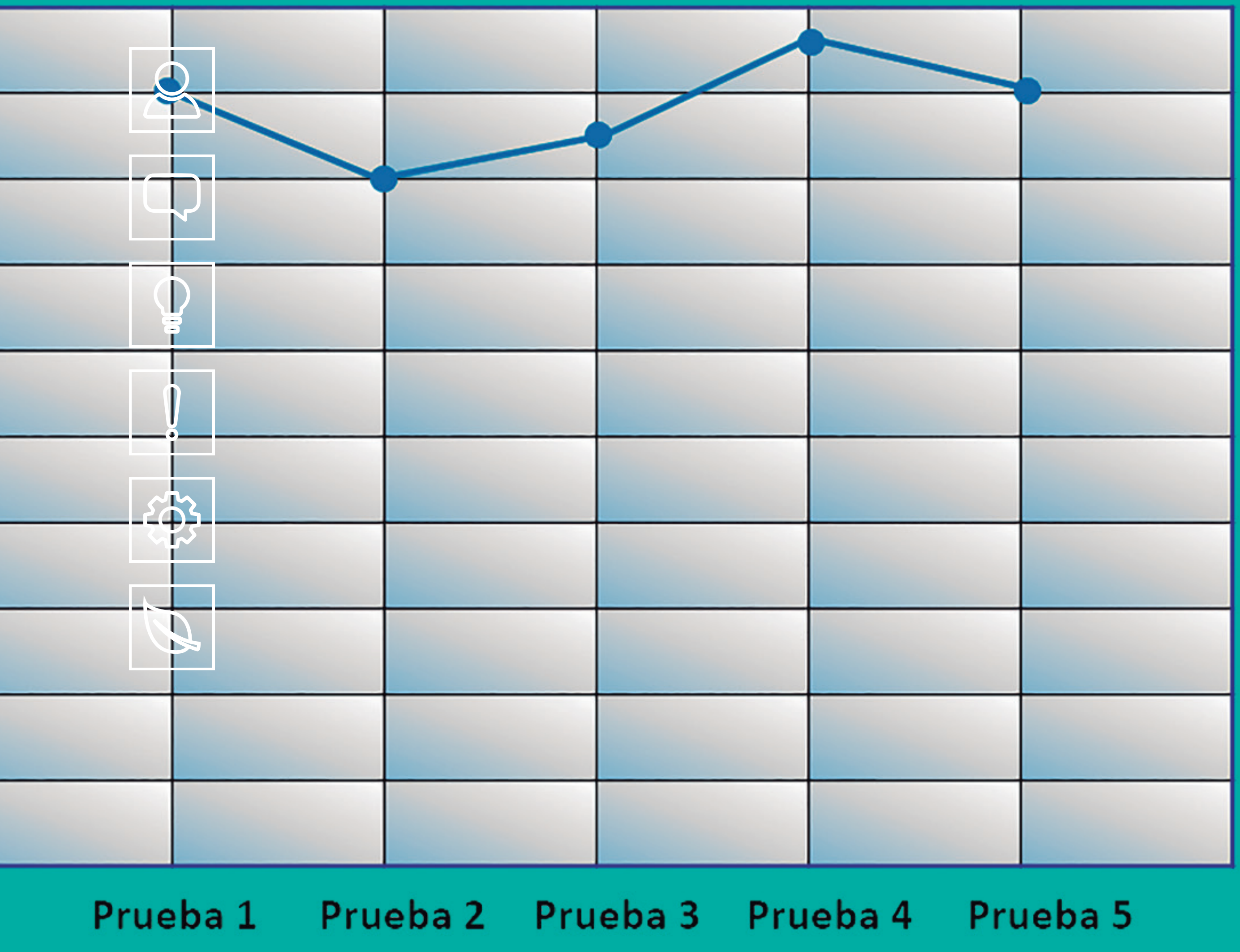
- Es navidad y José está horneando una pierna de cerdo y en la receta se indica que la temperatura de cocción es de 160 °C, pero, su horno está expresado en °F. ¿A qué temperatura debe colocar el horno para obtener lo indicado en la receta?



- En una estación de esquí la temperatura más alta ha sido de 0 °C, y la más baja, de -50 °F. ¿Cuál ha sido la diferencia de temperatura?

- Un trabajador de un frigorífico se mueve entre la cámara de conservación de las frutas, que está a una temperatura de 7 °C, y la cámara de congelación de carnes que está a –15 °C ¿qué diferencia de temperatura experimenta el trabajador cuando va de una cámara a otra?

Pruebas de Matemáticas de Paula



Competencias Específicas

- Interpreta textos, leyendo, escribiendo y discutiendo en forma comprensiva sus ideas matemáticas para resolver problemas de su contexto.
- Aplica sus conocimientos matemáticos a la resolución de problemas abiertos y tareas ampliadas de resolución de problemas apoyándose en las tecnologías digitales.
- Modela posibles soluciones a situaciones del contexto social y el medio ambiente a partir de sus conocimientos matemáticos.


Unidad 12

Manejando datos en la vida cotidiana


Situación de aprendizaje

En la vida cotidiana se ven situaciones o eventos donde se estudian, organizan e interpretan conjuntos de datos. Una de las formas de representar los datos son los gráficos de línea.

En la imagen se observa el gráfico que construyó Paula con el número de respuestas correctas de sus exámenes de matemáticas.

Había 20 problemas en cada prueba.

- ¿Cuántos problemas falló Paula en la Prueba 3?
- ¿Cuál fue el número promedio de respuestas correctas en las primeras tres pruebas de Paula?
- ¿Qué fracción, del total de los problemas de la Prueba 4, contestó Paula correctamente?

Contenido

- Recolecta y organiza datos en tablas de frecuencias
- Cálculo de media o promedio, mediana y moda
- Gráficas de barras, gráficos lineales y pictogramas
- Gráficos circulares o de sectores
- Probabilidad, espacio muestral y diagrama de árbol
- Actividad grupal
- Evaluación


Aa

Un **dato** puede ser un número, una palabra o grupo de símbolos usados para estudiar alguna característica de un evento.

La **frecuencia** es la cantidad de veces que se repite un dato.

Cuando necesitamos extraer conclusiones respecto a un grupo grande de individuos, se hace imposible examinar cada uno de los individuos que forman la **población**. Ante esta dificultad, se toma una pequeña parte de la población, que se llama **muestra**.

La frecuencia es la cantidad de veces que se repite un dato. Ésta puede ser absoluta, que es el número de veces que aparece un dato, o relativa, que es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.

$$\text{Frec. relativa} = \frac{\text{Frec. absoluta}}{\text{Total}}$$

La frecuencia relativa va a estar acotada entre 0 y 1, debido a que la frecuencia de los valores de la muestra, siempre va a ser menor o igual al tamaño de la muestra.

La suma de todas las frecuencias relativas va a ser 1, si se mide por unidad, o 100 si se mide en tanto por ciento.

Recolecta y organiza datos en tablas de frecuencias

¿Qué es un dato? ¿Cómo se organizan los datos?

Organiza datos a través de tablas de frecuencias

El maestro recopila y registra información sobre su clase, incluida la asistencia, la tarea y los puntajes de las pruebas. En la escuela se recopila información sobre el número de alumnos de los cursos, la cantidad de almuerzos y los suministros necesarios. Los equipos deportivos recopilan información sobre victorias y derrotas, puntos anotados y no permitidos. Los científicos que prueban nuevos medicamentos toman nota de cuántos responden bien o mal al tratamiento y de cuántos experimentan efectos secundarios.

A este tipo de información recopilada se le llama **datos**, y al estudio de los datos se le llama estadística. Las personas que trabajan con estadísticas recopilan, organizan y analizan datos.

Los datos recién recopilados a menudo no están organizados. Para ser útiles, primero deben organizarse. En esta lección practicaremos una forma de organizar datos, a través de tablas de **frecuencias**.

Ejemplo 1. Se realizó una encuesta a 35 estudiantes del curso de 6º grado de primaria y se les preguntó, ¿cuál de los siguientes deportes es su favorito: béisbol, voleibol, fútbol o baloncesto? Los datos se organizaron en una tabla de frecuencias que muestra cuántos estudiantes eligieron cada deporte. Luego que se cuenta el número de estudiantes que eligieron cada deporte, se obtiene la frecuencia de cada puntaje. Se enumeran estas frecuencias en una tercera columna, como se muestra a continuación en la tabla.

Deporte favorito	Cuenta	Frecuencia	Frecuencia relativa
Béisbol	𝍸 𝍸 𝍸	15	$\frac{15}{35} \approx 0.43$
Voleibol	𝍸	5	$\frac{5}{35} \approx 0.14$
Fútbol	𝍸 ||||	9	$\frac{9}{35} \approx 0.26$
Baloncesto	𝍸 |	6	$\frac{6}{35} \approx 0.17$
		35	$\frac{35}{35} = 1$

En la tabla se observa que el deporte seleccionado como favorito por más estudiantes es el béisbol.

Ejemplo 2. Durante el mes de julio, en la ciudad de Jimaní se han registrado las siguientes temperaturas (°C) máximas:

32, 31, 28, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 27, 28, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33, 33, 29, 29.

Si presentamos esta información estructurada obtendríamos la siguiente tabla de frecuencias.

Temperatura (°C)	Cuenta	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia porcentual
27	/	1	$\frac{1}{31} \approx 0.03$	3 %
28	//	2	$\frac{2}{31} \approx 0.06$	6 %
29	~~////~~ /	6	$\frac{6}{31} \approx 0.19$	19 %
30	~~////~~ //	7	$\frac{7}{31} \approx 0.23$	23 %
31	~~////~~ ///	8	$\frac{8}{31} \approx 0.26$	26 %
32	///	3	$\frac{3}{31} \approx 0.10$	10 %
33	///	3	$\frac{3}{31} \approx 0.10$	10 %
34	/	1	$\frac{1}{31} \approx 0.03$	3 %
Total	**31**	**31**	$\frac{31}{31}$ **=1**	**100 %**

Se observa en la tabla que la temperatura que más se repitió en el mes de julio es de 31°C. También se puede apreciar que, la temperatura menor y mayor registrada durante ese mes ha sido de 27 °C y 34 °C, respectivamente.

Por otra parte, se puede afirmar que 27 °C representa el 26 % del total de temperaturas registradas en el mes de julio.

- Se **preguntó** a treinta niños cuántos hermanos y hermanas tenía cada uno. Las respuestas fueron estos números: 4, 2, 3, 0, 1, 1, 3, 0, 4, 1, 2, 4, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 0, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 0. Realiza una tabla de frecuencias que muestre el número de hermanos y hermanas que tiene cada niño.
- En República Dominicana los postres más populares son: arepa dominicana, habichuelas con dulce, maíz caquiao o chacá, majarete, jalao de coco, dulce con coco y batata. **Realiza** una encuesta a 20 estudiantes de tu escuela y pregunta cuál de estos dulces es su preferido. Luego, realiza una tabla de frecuencias con los datos obtenidos y responde a qué conclusión puedes llegar con la información recolectada.

En el siguiente enlace conseguirás más información y ejemplos de recolección y organización de datos en tablas de frecuencias.

https://es.liveworksheets.com/il2161806nh

Como la frecuencia relativa está entre 0 y 1, si se multiplica por 100, se conseguirá calcular la frecuencia porcentual.

Frec %= frec.relativa·100

- Aplica en el marco de la ética ciudadana los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadística de números naturales y enteros para contribuir con la preservación del medio ambiente y la toma de decisiones en favor de la comunidad, respetando las diferencias de opiniones de los demás.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Gráficas de barras, gráficos lineales y pictogramas

No existen reglas estrictas aplicables a los gráficos de barras, pero como normas generales de presentación se sugieren las siguientes:

- El ancho de la barra debe ser uniforme para todas las barras del diagrama.
- La longitud de la barra debe ser proporcional a la cantidad que representa.
- El espacio de separación entre barras por cada categoría debe ser constante.
- Las barras en estos gráficos pueden disponerse vertical u horizontalmente.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_barras

William Playfair (22 de septiembre de 1759 – 11 de febrero de 1824) fue un ingeniero escoses y economista político, introductor de los gráficos en estadística. Inventó tres tipos de esquemas: en 1786 el polígono de frecuencias, el gráfico de barras y en 1801 el gráfico de tarta, utiliza utilizado para mostrar relaciones parte-todo

¿Con qué gráfico se representan los datos que se organizan en tablas de frecuencias?

Organiza datos en diagramas de barras, de líneas y pictogramas

El diagrama de barra y diagrama de línea son gráficos que se utilizan para representar gráficamente un conjunto de datos o valores.

Para construir un diagrama de barras y de líneas sigue los siguientes pasos.

a. Se trazan rectas numéricas horizontales y verticales, y se realizan las divisiones en cada una (siempre considerando el valor menor y el mayor para elegir una escala).

b. En la recta horizontal se ubican las variables o valores de las variables y en el eje vertical, se ubican las frecuencias absolutas de estas variables o valores.

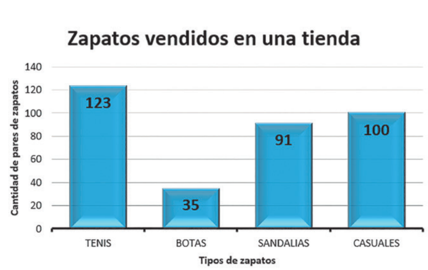
c. Luego se hace corresponder cada variable o valor con su frecuencia.

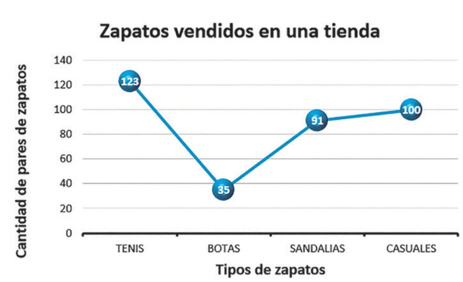
Para el diagrama de barras, se dibuja una barra de modo que su altura sea la frecuencia de ese valor (alturas proporcionales a las frecuencias).

Para el diagrama de líneas, se une cada punto consecutivamente formando rectas.

Ejemplo: la siguiente tabla muestra el número de pares de zapatos vendidos en una tienda y, seguidamente, se muestra el diagrama de barras y el de líneas correspondiente a dichos datos.

Tipos de zapatos	Frecuencia absoluta
Tenis	123
Botas	35
Sandalias	91
Casuales	100
Total	**349**

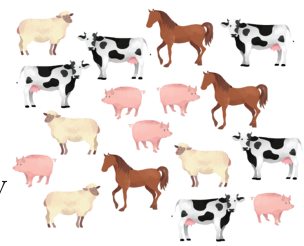




Un **pictograma** es un gráfico donde se utilizan dibujos o figuras para representar ordenadamente una información.

Para realizar un pictograma se organizan los datos en una tabla y luego se realiza el gráfico usando dibujos.

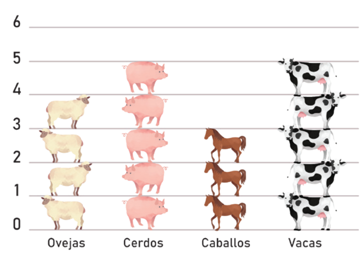
Ejemplo: en una granja se encuentran los siguientes animales. Organiza los datos en una tabla y realiza un pictograma.



Solución: se organizan los datos en una tabla y luego se realiza el gráfico usando las imágenes de los animales.

Se puede observar que hay igual cantidad de cerdos y vacas. También se observa que hay menor cantidad de caballos.

Animales	Frecuencia absoluta
Ovejas	4
Cerdos	5
Caballos	3
Vacas	5
Total	**17**



Planta	Frecuencia absoluta
Orquídeas	5
Cayenas	8
Claveles	10
Girasoles	6
Total	**29**

Tabla 1.

- El número de estudiantes que asistieron a la escuela en una semana fue: lunes 198, martes 190, miércoles 195, jueves 200 y viernes 185. Con los datos proporcionados, **realiza** una tabla de frecuencias, luego dibuja un diagrama de barras y un diagrama de línea.
- **Observa** el gráfico y responde. ¿Qué cantidad de estudiantes visitó la biblioteca en el primer trimestre 2023? ¿Cuál fue el número de visitas máximas que se realizó?

- **Construye** el pictograma correspondiente a la siguiente tabla 1 sobre los tipos de plantas (Orquídeas, Cayenas, Claveles y Girasoles).

- Emplea la creatividad, basada en la resolución de problemas, para interpretar situaciones del contexto escolar y comunitario en la que se apliquen las medidas de tendencia central asociadas al cálculo de probabilidad sobre un espacio muestral y representa la solución del problema planteado en gráficos lineales.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Un sector circular es el conjunto de puntos interiores de un círculo, delimitado por dos de sus radios y el arco determinado por los extremos de dichos radios.

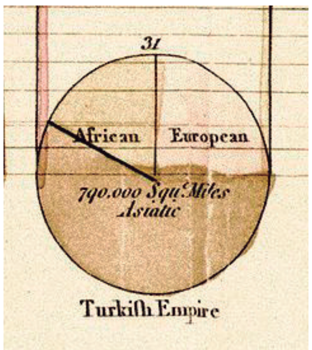


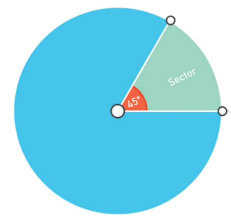
Gráfico de tarta del *Breviario Estadístico* (1801), mostrando las proporciones del Imperio turco localizado en Asia, Europa y África antes de 1789.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/William_Playfair

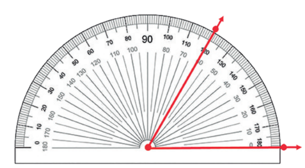
Gráficos circulares o de sectores

¿Para qué se utilizan los gráficos circulares o de sectores?

Representa datos a través de gráficos circulares



En los gráficos circulares o de sectores se representan datos en un círculo, de modo que la frecuencia de cada valor viene dada por un sector de área del círculo, quedando el círculo dividido en sectores con amplitudes proporcionales a las frecuencias. Generalmente, el uso básico de una gráfica de este tipo, o como se suele llamar también de pastel, sigue siendo visualizar un porcentaje o las partes de un todo.



Para graficar los porcentajes en el grafico circular se calculan los ángulos centrales correspondientes a cada porcentaje y se utiliza un transportador para graficar los ángulos en el círculo.

Para hallar el ángulo se multiplica el porcentaje por 360º y se divide el resultado entre 100. La fórmula es:

$$\text{Ángulo} = \frac{\% \cdot 360^0}{100}$$

Ejemplo 1: en la siguiente tabla se muestran los porcentajes de ventas en un día en una frutería. Realiza un gráfico circular que refleje los porcentajes de ventas.

Frutas	Frecuencia porcentual
Piña	40%
Guanábana	30%
Guayaba	10%
Mango	20%
Total	100%

Solución: se deben hallar los ángulos correspondientes a cada porcentaje de cada fruta:

Piña	$\frac{40 \cdot 360°}{100} = 144°$
Guanábana	$\frac{30 \cdot 360°}{100} = 108°$
Guayaba	$\frac{10 \cdot 360°}{100} = 36°$
Mango	$\frac{20 \cdot 360°}{100} = 72°$

Luego, con el uso del transportador, se marcan los porcentajes en el círculo y se trazan líneas desde el centro hasta la marca. Cada sector circular se dibuja con diferentes colores y se identifica el porcentaje de cada sector (figura 1).

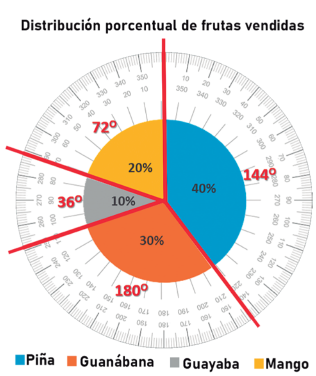
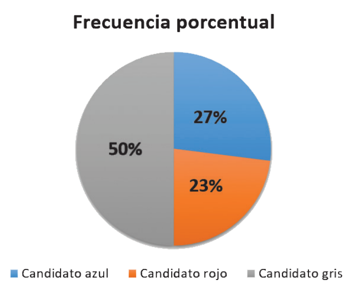


Figura 1.

Ejemplo 2: en la siguiente tabla, se muestran los resultados de unas elecciones para elegir al representante estudiantil de los estudiantes de 6º grado. Se especifica la cantidad de votos que obtuvo cada participante y el porcentaje que obtuvo cada uno. Representa los resultados en un gráfico circular elaborado con la herramienta de Excel.

Participante	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia porcentual
Eleuterio (azul)	16	0.27	27%
Ángel (rojo)	14	0.23	23%
Manuel (gris)	30	0.50	50%
Total	**60**	**1**	**100%**

Solución: en la hoja de cálculo, selecciona los datos que quieras agregar en el gráfico circular. Haz clic en *Insertar gráfico circular*. Sigue los pasos del tutorial: *cómo agregar un gráfico circular.*



El gráfico circular o de sectores frecuentemente también es conocido como el grafico de la tarta o de pastel.

- En un hotel de Puerto Plata, durante el desayuno se permite a los turistas solicitar una ración extra de los siguientes alimentos que se muestra en la tabla. Completa la tabla y elabora dos gráficos circulares: uno con el uso del transportador y otro con la herramienta de Excel. ¿Qué información puedes inferir de la gráfica?

Alimentos	Frec. absoluta	Frec. relativa	Frec. porcentual	Ángulo
2 rebanadas de pan	69			
2 rebanadas de tocino	74	0.26	26%	93.6º
2 huevos	142			
1 taza de café	5			
Total	**290**			**360º**

- El siguiente gráfico circular muestra cómo Juanita pasa un día normal de 24 horas, durante las vacaciones escolares: (a) ¿qué actividad consume la mayor parte del tiempo de Juanita?,

Para interpretar un gráfico circular, compara los grupos. Cuando se interpreta un gráfico circular, se buscan las diferencias en los tamaños de los sectores. El tamaño de un sector muestra la proporción de observaciones que están en ese grupo.

- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Medidas de tendencia central

La media, la mediana y la moda son formas diferentes de describir el centro de un conjunto de datos, se les llama también medidas de tendencia central.

¿Cuáles son las medidas de tendencia central?

Calcula la media, la mediana y la moda de un conjunto de datos

La media puede coincidir o no con alguno de los datos del conjunto.

Si el número de datos es impar, la mediana coincidirá con uno de los datos; si es par, puede que no ocurra esa coincidencia.

La moda siempre coincide con un dato de la distribución.

La media se suele representar por $\bar{x}$, que es el valor que se obtiene al dividir la suma de todos los valores de los datos entre la cantidad de datos. Es decir, es el valor promedio de todos los datos, por lo que su cálculo se basa en la fórmula de promedio:

$$\text{x} = \frac{\text{suma de todos los datos}}{\text{cantidad los datos}}$$

Ejemplo 1: encuentra la media de este conjunto de datos: 6, 3, 8, 6 y 4.

Solución: dividimos la suma de los datos (27) por el número de datos (5). Encontramos que la media del conjunto de datos es 5.4.

$$\bar{x} = \frac{6+3+8+6+4}{5} = \frac{27}{5} = 5.4$$

La **mediana** es el valor central en un conjunto de datos ordenados. Es decir, el valor de la variable, que, en una distribución de frecuencias, deja igual número de datos antes y después de él. Se representa por Md.

Procedimiento para encontrar la mediana.

1. Se ordenan los datos.

2. Si el número de datos es impar, la mediana estará representada directamente por el valor central.

3. Si el número de datos es par, la mediana estará representada por la media aritmética de dos datos centrales.

Ejemplo 2. El equipo de béisbol de la escuela en los últimos cinco juegos anotó las siguientes carreras: 9, 2, 6, 8, 1 y 4. Encuentra la mediana.

Solución. Se ordenan los datos: 1, 2, 4, **6**, 8, 9, 15

Como la cantidad de datos es impar la mediana está representada directamente por el valor central que es 6.

Ejemplo 3. Las alturas en metros de las jugadoras de un equipo de voleibol son: 1.6, 1.5, 1.7, 1.7, 1.4, 1.8, 1.7, 1.5, 1.6, 1.7. Encuentra la mediana.

Solución. Se ordenan los datos:

1.4, 1.5, 1.5, 1.6, **1.6**, **1.7**, 1.7, 1.7, 1.7, 1.8

Como la cantidad de datos es par, la mediana estará representada por la media aritmética de los datos centrales.

$$Md = \frac{1.6 + 1.7}{2} = \frac{3.3}{2} = 1.65$$

La mediana es 1.65 m

La moda es el valor que más se repite dentro de un conjunto de datos, o es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta, por lo que puede haber más de una moda dentro del conjunto de datos. Se suele representar por Mo.

Ejemplo 4. Halla la moda de las calificaciones obtenidas por un grupo de estudiantes en su primera prueba de 20 puntos de matemáticas.

15, 20, **15**, 10, **12**, **12**, 14, **12**, 16, 18, 20, **15**, 19

Como se puede observar, el mayor número de frecuencia está en 12 y 15, repitiéndose 3 veces cada uno. Por tanto, Mo =12 y Mo = 15. En este caso, la moda se llama bimodal porque existen dos diferentes.

- A los estudiantes de 6.° grado de primaria se les realizó una prueba física para medir su resistencia. Los resultados de dicha prueba (medida en minutos), para cada uno de los 20 estudiantes, fueron los siguientes: 25, 27, 30, 33, 30, 32, 30, 34, 30, 27, 26, 25, 29, 31, 31, 32, 34, 32, 33, 30.

Elabora una tabla de frecuencias y encuentra la media, la mediana y la moda. Luego entra al enlace siguiente y verifica tus resultados:

https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Estad%C3%ADstica/Estad%C3%ADstica_my497881ud

Cuando solo exista una moda la llamaremos **unimodal**, cuando existan dos modas **bimodal** y cuando existan más de dos modas **multimodal.**

Practicando el cálculo de las medidas de tendencia central: media, mediana y moda.

https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Estad%C3%ADstica/Estad%C3%ADstica_**my497881ud**

- Emplea la creatividad basado en la resolución de problemas para interpretar situaciones del contexto escolar y comunitario en la que se apliquen las medidas de tendencia central asociadas al cálculo de probabilidad sobre un espacio muestral y representa la solución del problema planteado en gráficos lineales.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.

Probabilidad, espacio muestral y diagrama del árbol

Un **experimento aleatorio** es la reproducción controlada de un fenómeno cuyo resultado no se puede predecir.
Algunos experimentos que implican probabilidad son lanzar una moneda, hacer girar una rueda giratoria y seleccionar un objeto de un conjunto de objetos sin mirarlo. Las probabilidades de los resultados de cualquier experimento siempre suman 1.

La **estadística inferencial** es el campo de la estadística que estudia el comportamiento de unas variables y sus consecuencias, y las extiende hacia grupos más amplios.
Es una de las ramas más importantes de la estadística y su implementación es útil a la hora de establecer rutas de acción en distintos escenarios.

La probabilidad de que al lanzar una moneda de RD$25 salga una cara o un escudo es ½ ya que ambos sucesos son igualmente probables.

$$P = \frac{Rf}{Rp} = \frac{1}{2} = 0.5$$

En una funda hay dos bolas azules y dos rojas. Se extrae una bola al azar sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

Hay muchas situaciones en las que el resultado futuro es incierto. Por ejemplo, el pronóstico del tiempo podría decir que es probable que llueva mañana, pero esto sería solo una suposición. Puede que llueva o puede que no llueva. Si tomamos un vuelo en avión, podemos llegar temprano, podemos llegar tarde o podemos llegar a tiempo. No lo sabemos con certeza de antemano.

Calcula probabilidades

El **espacio muestral** de un **experimento aleatorio** se refiere al conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

La probabilidad es la mayor posibilidad de que ocurra algo en un suceso de azar o experimento aleatorio. Para calcular la probabilidad (P) de que ocurra un evento determinado, se usa la siguiente fórmula:

$$P = \frac{\text{número de resultado favorable}}{\text{número de resultado posible}} = \frac{Rf}{Rp}$$

El resultado que se obtiene de la probabilidad debe estar comprendido entre 0 y 1.

Ejemplo: si en un salón de clases los niños tienen mochilas de diferentes colores y hay 18 niños con mochilas verdes, 8 con rojas, 2 con azules y 6 con negras, ¿cuál es la probabilidad de que al tomar al azar una mochila, esta sea de color verde?

Solución: primero se debe calcular el número de resultados posibles (el espacio muestral) y este está dado por la suma de la cantidad de mochilas que hay en el salón: $Rp = 18 + 8 + 2 + 6 = 34$. Entonces, hay 34 mochilas.

El número de resultados favorables para la probabilidad de que al tomar al azar una mochila esta sea verde, donde hay 18 mochilas verdes, es: Rf = v18

Luego, la probabilidad de que este evento ocurra está dada por:

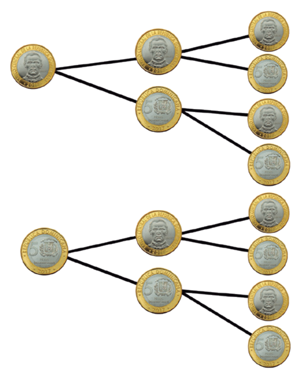
$$P = \frac{Rf}{Rp} = \frac{18}{34} = 0.529 \;.\; 0.52$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la mochila sea verde es de 0.5.

Un **diagrama de árbol** es un tipo de gráfico utilizado en la **estadística inferencial** para representar visualmente los resultados posibles de un experimento (el espacio muestral). Se utiliza en el análisis de probabilidades.

Un diagrama de árbol muestra todas las posibilidades que pueden obtenerse de los datos y, muchas veces, desde un punto inicial hasta un punto final.

Ejemplo. Se arroja una moneda tres veces. Se desea determinar la probabilidad de obtener cara, escudo y cara, en ese orden.



Solución. Se elabora el diagrama de árbol usando los posibles sucesos planteados en la situación (ver figura).

Se cuenta el número de resultados posibles (Rp) (el espacio muestral), en este caso son 8:

Se cuentan los resultados favorables (*Rf*) para obtener cara, escudo y cara, en ese orden, en este caso es 1.

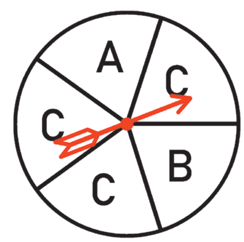
Luego la probabilidad de obtener cara, escudo y cara es:

$$P = \frac{Rf}{Rp} = \frac{1}{8} = 0.125 \;.\; 0.12$$

- **Hallar** la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de los puntos sea igual a 8.
- Se **arroja** una moneda cuatro veces. Se desea determinar la probabilidad de obtener cara todas las veces.
- Tres amigos, Juan, María y Ana, se **ubican** en tres asientos contiguos en un juego de béisbol. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan se siente entre sus dos amigas? Realiza un diagrama de árbol. Puedes apoyarte en *GeoGebra* https://www.geogebra.org/t/tree-diagrams?lang=es

Complementa información acerca del diagrama del árbol.

Supongamos que la ruleta gira y se detiene en uno de los sectores



¿Cuál es la probabilidad de que al girar se detenga en A?.

- Emplea la creatividad basado en la resolución de problemas para interpretar situaciones del contexto escolar y comunitario en la que se apliquen las medidas de tendencia central asociadas al cálculo de probabilidad sobre un espacio muestral y representa la solución del problema planteado en gráficos lineales.

Actividad grupal

Resolviendo e interpretando probabilidades

¿Qué haremos?

Resolver problemas en forma colaborativa, para reforzar el aprendizaje de probabilidades.

¿Qué necesitamos?

Lápiz, papel, calculadora y libro de texto.

Probabilidad	El Suceso será
Igual a 1	Seguro
Cercana a 1	Muy probable
Igual a 0.5	Probable
Cercana a 0	Poco probable
Igual a 0	Imposible

¿Cómo nos organizamos?

Formar equipos de 3 integrantes, donde todos tendrán igual responsabilidad para la resolución de los problemas.

¿Cómo lo haremos?

Resolver uno a uno los problemas. El equipo tiene que llegar a un consenso. Es decir, negociar hasta que se logre una conclusión que satisfaga a todos los integrantes del grupo.

Lista de problemas

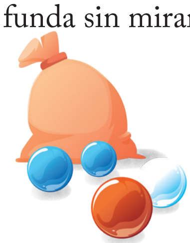
- Se lanza un dado.

  ¿Qué palabra describe mejor cada evento en las partes (a)–(d): seguro, muy probable, probable, poco probable o imposible?

  - El dado se detendrá con 3 puntos en la parte superior.
  - El dado se detendrá con más de 2 puntos en la parte superior.
  - El dado se detendrá con menos de 7 puntos en la parte superior.
  - El dado se detendrá con más de 6 puntos en la parte superior.
  - El dado se detendrá con al menos un punto en la parte superior.

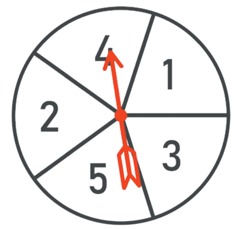
- Una funda contiene 5 bellugas rojas, 3 bellugas azules y 2 bellugas blancas. Supongamos que sacamos una belluga de la funda sin mirar.

  - Calcula la probabilidad de que la belluga sea azul.
  - Calcula la probabilidad de que la belluga no sea azul.

- Para el experimento descrito, Enmanuel dijo que la probabilidad de 3. Si el pronóstico del tiempo dice que la probabilidad de lluvia es del 40 %, ¿es más probable que llueva o que no llueva?

- Si la probabilidad de lluvia hoy es del 20 %, ¿cuál es la probabilidad de que no llueva hoy?
- Para la pregunta de opción múltiple que tiene cuatro opciones, de las cuales solo una es la respuesta correcta, Keyla calculó que tenía un 25 % de posibilidades de adivinar la respuesta correcta. ¿Cuál era su probabilidad de no adivinar correctamente la respuesta?
- Usen la ruleta de la derecha para responder.



  - ¿Cuál es la probabilidad de que la ruleta se detenga en 3?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número mayor que tres?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la ruleta se detenga en un número impar?

Presentación y socialización de la actividad

Elaboren una presentación en PowerPoint, en donde expliquen cada uno de los pasos que los llevó a la resolución de cada problema. Luego compartan el resultado de este trabajo con toda la clase.

Coevaluación

Cada miembro del equipo escoge a otro compañero y describe brevemente: cómo contribuyó al trabajo del equipo y qué debe mejorar, para próximas actividades colaborativas.

Autoevaluación

Una vez que hemos finalizado la tarea, es un buen momento para reflexionar sobre tu aprendizaje.

¿He cambiado alguna idea previa? ¿Cuál?

¿Qué me ha resultado más difícil, o más fácil? ¿Por qué?

Te puedes apoyar en Symbolab para realizar los cálculos.

https://es.symbolab.com/solver/probability-calculator

sacar una belluga roja era 1. ¿Están de acuerdo o en desacuerdo con Enmanuel? ¿Por qué?

- Emplea la creatividad basado en la resolución de problemas para interpretar situaciones del contexto escolar y comunitario en la que se apliquen las medidas de tendencia central asociadas al cálculo de probabilidad sobre un espacio muestral y representa la solución del problema planteado en gráficos lineales.
- Utiliza herramientas tecnológicas para dar solución a situaciones que impliquen procesos matemáticos sobre los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadísticas para datos no agrupados con números naturales y enteros.
- Aplica en el marco de la ética ciudadana los conocimientos de numeración, geometría, medición y estadística de números naturales y enteros para contribuir con la preservación del medio ambiente y la toma de decisiones en favor de la comunidad, respetando las diferencias de opiniones de los demás.

Evaluación

- Completa la tabla que corresponde a una encuesta realizada a 35 estudiantes que se les pregunta: ¿cuál es su clase favorita?

Clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Matemáticas	13	
Lengua española	10	
Ciencias sociales	7	
Ciencias de la Naturaleza	5	
Total	**35**	

- Un conjunto de datos consta de siete valores: 6, 3, 8, 5, 6, 7 y 4, encuentre la media, la mediana y la moda.

- Las edades en años de cinco hermanas son: 40, 43, 35, 37 y 48. Encuentra la media, la mediana y la moda.

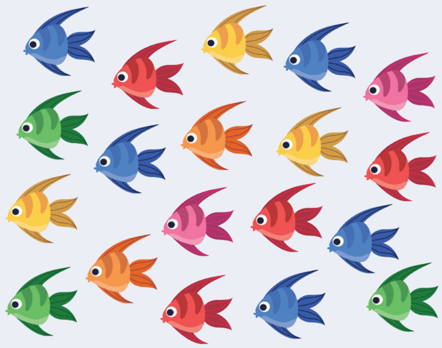
- La altura en metros de las jugadoras de un equipo de futbol son: 1.8, 1.6, 1.6, 1.7, 1.7, 1.8, 1.7, 1.8, 1.9, 1.7. Encuentra la media, la mediana y la moda.

- A los aspirantes de una escuela de natación se les solicitó presentar un examen que mide la capacidad que tienen de aguantar la respiración bajo el agua. Los resultados de dicha prueba (medida en segundos) para cada uno de los 20 aspirantes son los siguientes: 120, 127, 60, 80, 125, 132, 30, 134, 130, 127, 126, 125, 129, 31, 31, 125, 34, 32, 33, 30. Elabora una tabla de frecuencias y encuentra la media, la mediana y la moda. Entra al enlace y verifica tus resultados: https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Estad%C3%ADstica/Estad%C3%ADstica_my497881ud

- La siguiente tabla muestra el número de kilos de granos vendidos en una tienda. Realiza un diagrama de barras y un diagrama de líneas correspondiente a los datos.

Granos	Frecuencia absoluta
Habichuelas	12
Lentejas	6
Frijol	8
Arvejas	4
Total	**20**

- Observa la imagen, realiza un pictograma y responde: ¿cuál es el color del pez que más se repite?



- El número de pacientes que asistieron a consulta médica en una semana fue: lunes 20, martes 15, miércoles 32, jueves 8 y viernes 18. Con los datos, realiza una tabla de frecuencias y luego dibuja un diagrama de barras y un diagrama de línea.

- Construye el pictograma correspondiente a la siguiente tabla de datos.

Animales	Frecuencia absoluta
Loro	5
Perro	12
Gato	10
Conejo	3
Total	**30**

- En la siguiente tabla se muestran los resultados de unas pelotas sacadas aleatoriamente de una funda

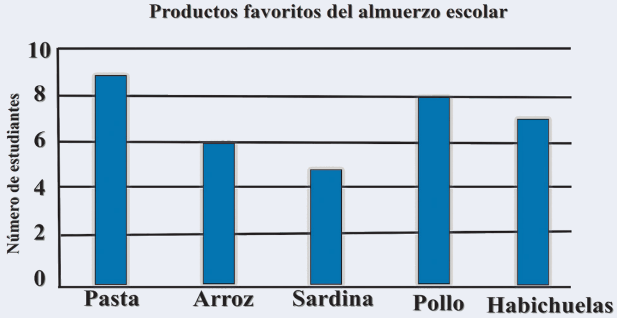
Globos	Frec. absoluta	Frec. relativa	Frec. porcentual
Azul	16	0.20	20%
Rojo	10	0.125	12.5%
Verde	40	0.50	50%
Amarillo	14	0.175	17.5
Total	**80**	**1**	**100%**

Elabora un gráfico de línea y uno circular.

- Si en un salón de clases los niños tienen lápices de grafito de diferentes colores y hay 20 niños con lápices verdes, 10 con rojos, 5 con azules y 8 con negros, ¿cuál es la probabilidad de que al tomar al azar un lápiz, este sea rojo?

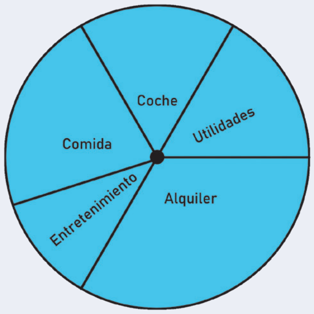
- Tres hermanos, Luis, Rosa y Pedro, se ubican en tres asientos contiguos en la mesa del comedor. ¿Cuál es la probabilidad de que Rosa se siente entre sus dos hermanos? Realiza un diagrama de árbol. Puedes apoyarte en la herramienta tecnológica https://www.geogebra.org/t/tree-diagrams?lang=es

- A cada estudiante de la clase se le pidió que seleccionara su producto favorito del almuerzo escolar. Los resultados se registran en el siguiente gráfico.



De acuerdo con el gráfico, ¿cuántos estudiantes eligieron la pasta como su comida escolar favorita?

- El gráfico circular muestra cómo los gastos mensuales de la familia se dividen. ¿Qué gasto consume alrededor de un tercio del presupuesto?



¿Qué información podemos inferir de esta gráfica?

- Los primeros tres puntajes de las pruebas de Elizabeth fueron 80, 80 y 95. ¿Cuál fue el promedio de las calificaciones de las tres primeras pruebas de Elizabeth?

- ¿Cuál es la probabilidad de que cuando se lanzan dos dados, la suma de los números en las caras vueltas hacia arriba sea 6?

- Se arroja una moneda tres veces. Se desea determinar la probabilidad de obtener cara, escudo y escudo en ese orden. Realiza un diagrama de árbol.

BIBLIOGRAFÍA

Referencias de matemática

- Russel, K. y Carter, P. (2,000). Juegos de ingenio 2. Bogotá: Printer Latinoamericana.
- Flores, P. y Rico, L. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Madrid: Pirámide.
- George P. (1,965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.
- Isoda, M. y Olfos R. (2,009). El Enfoque de Resolución de Problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Hernández, L., Borja, I., Slisko, J. y Juárez J. (editores) (2019). Aportes a la educación matemática basados en la investigación. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla / Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (2022). Adecuación Curricular. Nivel Primario. Santo Domingo, D.N.
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (2016). Diseño curricular. Nivel Primario. Segundo Ciclo (4to, 5to y 6to). Santo Domingo, D.N.
- Steffe, L. y Olive, J. (2,010). Children's Fractional Knowledge. Dordrecht/Heidelberg/London: Springer.
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En: R. Lesh, y D. Bradbar (Eds.), Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop, 101- 144. Columbus: eric/smeac.
- Watson, J. (2006). Statistical literacy at school: growth and goals. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. American Mathematical Monthly, 104(9), 801–823.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), 229-240.

Referencias curriculares

- Germán, L., Mejía, G. E. S., Morales, J. E., Báez, E. E. R., & Diaz, Y. Educación Vial Nivel Secundario. https:/www.educando.edu.do/portal/wp-content/uploads/2023/03/Fasciculo-Educacion-Vial-NS.pdf
- Ministerio de Educación de la República Dominicana. (2022). Adecuación Curricular. Dirección General de Currículo. Santo Domingo: MINERD. Tomado de: https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/docs/direccion-generalde-curriculo/IgwQ-adecuacion-curricular-nivel-secudariopdf.pdf
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD). (2016a). Diseño Curricular Nivel Primario: Primer Ciclo. Santo Domingo, República Dominicana: Ministerio de Educación de la República Dominicana. [Links]
- Ministerio de Educación de la República Dominicana. (2016). Diseño curricular nivel secundario, primer ciclo. Santo Domingo: MINERD. Recuperado de https://bit.ly/2wcvInk
- Ministerio de Educación de la República Dominicana (MINERD). (2016b). Bases de la Revisión y Actualización Curricular. Santo Domingo, República Dominicana: Ministerio de Educación de la República Dominicana.
- Polanco Rivera, J. G., Cabrera , S. ., & Robles, V. . (2023). Caracterización del currículo: su desarrollo evolutivo según los enfoques curriculares en el contexto de la enseñanza preuniversitaria de República Dominicana. Revista De Investigación Y Evaluación Educativa. 10(1), 88–107. https://doi.org/10.47554/revie.vol10.num1.2023.pp88-107

Obras de referencia general

- ACADEMIA DOMINICANA DE LA LENGUA (2013): Diccionario del español dominicano, Santo Domingo, Editora Judicial.
- ACADEMIA DOMINICANA DE LA LENGUA. Diccionario fraseológico del español dominicano. Santo Domingo: Editora Judicial S.R.L., 2016. 626 pp. (ISBN: 978-9945-
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2006). Diccionario esencial de la lengua española. Espasa Calpe.
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2010): Ortografía de la lengua española. Madrid, Espasa Libros.
- Rimoli, R. O. (2012). Diccionario de Términos ambientales. Santo Domingo: Instituto Panamericano de Geografía e Historia, Sección Nacional de República Dominicana.
- Rodríguez Rancier, E., & Despotovic, N. (2011). Diccionario enciclopédico dominicano de medio ambiente. Washington, DC/Santo Domingo: Global Foundation for Democracy and Development (GFDD)-Fundación Global Democracia y Desarrollo (Funglode).
- Sáez, J. L. (S. J.) (1992). Breve historia política de la República Dominicana (1492-1992). Revista Estudios Sociales, 25(89/90).
- Urbina Barrera, F., & Hernandez-Laroche, A. (2023). Diccionario de la inmigración y la Otredad en las Américas en la sigo XXI.
- UNESCO. (2017). Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación. París: UNESCO.
- Varios autores (2003). Enciclopedia ilustrada de la República Dominicana (11T). Santo Domingo, Republica Dominicana: Eduprogreso, SA.

Webgrafía general

- Portal del Archivo General de la Nación. https://agn.gob.do/
- Portal del Consejo Nacional para la niñez y la adolescencia https://conani.gob.do/
- Portal de la educación dominicana. https://www.educando.edu.do/
- Portal del Instituto Geográfico Nacional. https://www.ign.gob.do/
- Portal del Ministerio de Educación de la República Dominicana. https://www.ministeriodeeducacion.gob.do/
- Portal del Ministerio de Medio Ambiente y Recursos Naturales de la República Dominicana. https://ambiente.gob.do/
- Portal del Consejo Nacional de Discapacidad. https://conadis.gob.do/
- Portal de Servicios del Gobierno Dominicano. https://www.gob.do/
- Galería de arte dominicano. https://www.galeriadeartedominicana.com/
- Portal educativo de ciencias, salud y medioambiente. https://ambientech.org/
- Portal educativo para el estudio de las matemáticas. https://www.geogebra.org/
- Portal educativo para tareas escolares. https://www.educapeques.com/
- Portal educativo de lengua http://www.eldigoras.com/eldyele/lng11profyestpsb.html
- Potal de lecturas literarias y aprendizaje de la lengua http://innovacion.iems.edu.mx/portal_lengua/
- Biblioteca de literatura infantil y juvenil. https://www.cervantesvirtual.com/
- Portal de educación infantil. https://www.mundoprimaria.com/
- Recursos educativos de preescolar. https://www.twinkl.es/
- Recursos educativos diversos. https://www.edufichas.com/
- Recursos para educación secundaria. https://www.educaciontres-puntocero.com/recursos/secundaria/

AUTORES

- **Wladimir Serrano.**

  Es Profesor de Matemática, Magíster en Educación, mención Enseñanza de la Matemática y Doctor en Educación. Realizó cursos de Post-doctorado en Desarrollo Estratégico de la Nación. Ha sido profesor invitado en la Maestría en Educación, mención Enseñanza de la Matemática del IPC, editor del "Boletín EM", de "Cientos" y de "La Garcita Azul", así como presidente de AsoVeMaT en su región Capital. Entre sus publicaciones se encuentran: Elementos de álgebra; Álgebra 1; El lenguaje matemático; Las actividades matemáticas, el saber y los libros de texto; Investigaciones en educación matemática, aportes desde una unidad de investigación; El Boletín EM en la historia; entre otras.

- **Esther Morales.**

  Licenciada en Educación Mención Matemática, Magíster en Educación Mención Enseñanza de la Matemática y Doctora en Intervención Psicopedagógica en Contextos Educativos. Profesora jubilada con categoría Titular de la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre". Venezuela, en la que obtuvo diferentes reconocimientos por su desempeño en labores académicas y de investigación. Durante su experiencia como docente de secundaria ganó el concurso nacional "estímulo al docente" y obtuvo reconocimientos por la formación matemática de jóvenes ganadores de la olimpiada de matemática venezolana. Ha desarrollado y publicado diferentes trabajos relacionados con: el desarrollo de destrezas cognoscitivas, evaluación de los aprendizajes, resolución de problemas, estrategias metacognitivas, entre otros. Ha publicado diferentes textos en el área de las matemáticas: Precálculo, Cálculo con Geometría Analítica, Matemática Superior, Geometría Descriptiva, Álgebra Superior I y Álgebra Superior II.

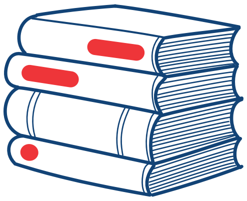
CONSEJOS PARA CUIDAR TUS LIBROS

Los libros de textos deben de tener una larga vida. Si sigues estos consejos, los libros podrán ser usados por tus hermanas, hermanos y otros estudiantes el próximo año escolar. De esta forma cuidamos el medioambiente y el patrimonio público nacional. Con estas acciones demostramos ser responsables.

1

Forra los libros inmediatamente entregados

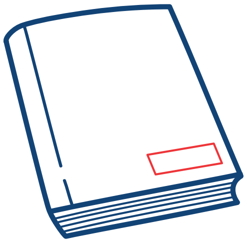
El forro no debe dañar el libro, usa forros con adhesivos.



2

Coloca una etiqueta con tu nombre en el forro

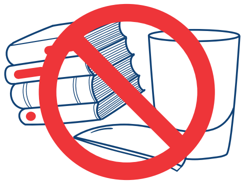
Nunca debes colocar la etiqueta de tu nombre pegada al libro. Así el estudiante siguiente lo encontrará como nuevo y podrá volver a usarlo.



3

Guarda los libros de texto una vez usados

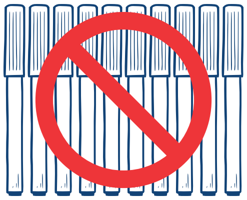
No los dejes abiertos en la mesa y evita comer o beber mientras estudias. Los líquidos son el peor enemigo de tus libros.



4

No subrayes con lapiceros o bolígrafos

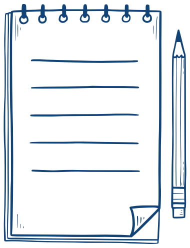
Evita el uso del lapicero, al utilizar la borra se daña el papel y la tinta del texto. En caso de ser necesario usa lápiz HB o B.



5

Estudia haciendo resúmenes o esquemas

Utiliza tu cuaderno para hacer resúmenes, esquemas y todos los ejercicios que aparecen en los libros.



CONSEJOS PARA CUIDAR TUS LIBROS

6 Evita introducir objetos dentro del libro

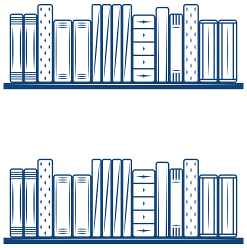
No marques las páginas introduciendo objetos en el libro. Si hay la necesidad de marcar, utiliza trozos de papel.

7 Organiza tus libros en la mochila

Organiza los libros y todos los materiales escolares en la mochila. Coloca la comida y los líquidos aparte.

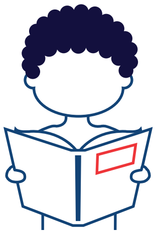
8 En casa, reserva un espacio exclusivo para tus libros

Coloca tus libros de forma vertical con el lomo hacia afuera para que se vea el título. Así estarán siempre bien conservados.



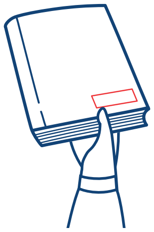
9 Utiliza el libro con cuidado

Evita forzarlos apretando o doblando excesivamente por el medio, evita forzar la encuadernación en el lomo del libro.



10 Lleva un control de los libros que prestas

Cuando prestes un libro, debes tener control sobre el préstamo y la fecha de devolución de tu libro.



PROYECTO LIBRO ABIERTO

El Proyecto Libro Abierto es una iniciativa del **Ministerio de Educación de la República Dominicana, (MINERD)**, que busca el desarrollo de contenidos y recursos didácticos, a través de diferentes plataformas digitales e impresas, con la finalidad de ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes dominicanos.

A partir de esta importante invención, el Ministerio de Educación presta especial atención a la necesidad de distribución de estos recursos y contenidos didácticos a las diferentes escuelas y liceos que conforman el sistema público de educación de la República Dominicana.

Este libro es una puerta abierta al universo virtual de conocimientos y referencias que aparecen representadas por el uso de los códigos QR de cada una de las unidades. Es una manera de ir más lejos en la búsqueda de informaciones porque permite a los estudiantes entrar en las redes, en las bibliotecas en línea, en informaciones especializadas que están cambiando por la entrada de nuevas discusiones y conocimientos científicos, en centros especializados en línea y en las rutas virtuales con las que se construyen los nuevos conocimientos que van surgiendo en las academias actuales. Se trata de un Libro Abierto con el que los estudiantes podrán emplear todas sus energías navegando y contrastando las informaciones que tiene esta colección.

Libro abierto

Para consultar el Diseño Curricular:

Dirección General de Currículo

www.ministeriodeeducacion.gob.do

Himno Nacional de la República Dominicana

I

Quisqueyanos valientes, alcemos
Nuestro canto con viva emoción,
Y del mundo a la faz ostentemos
Nuestro invicto glorioso pendón.

II

¡Salve! el pueblo que, intrépido y fuerte,
A la guerra a morir se lanzó,
Cuando en bélico reto de muerte
Sus cadenas de esclavo rompió.

III

Ningún pueblo ser libre merece
Si es esclavo indolente y servil;
Si en su pecho la llama no crece
Que templó el heroísmo viril,

IV

Mas Quisqueya la indómita y brava
Siempre altiva la frente alzará;
Que si fuese mil veces esclava
Otras tantas ser libre sabrá.

V

Que si dolo y ardid la expusieron
De un intruso señor al desdén,
¡Las Carreras! ¡Beller!, campos fueron
Que cubiertos de gloria se ven.

VI

Que en la cima de heroico baluarte
De los libres el verbo encarnó,
Donde el genio de Sánchez y Duarte
A ser libre o morir enseñó.

VII

Y si pudo inconsulto caudillo
De esas glorias el brillo empañar,
De la guerra se vio en Capotillo
La bandera de fuego ondear.

VIII

Y el incendio que atónito deja
De Castilla al soberbio León,
De las playas gloriosas le aleja
Donde flota el cruzado pendón.

IX

Compatriotas, mostremos erguida
Nuestra frente, orgullosos de hoy más;
Que Quisqueya será destruida
Pero sierva de nuevo, ¡jamás!

X

Que es santuario de amor cada pecho
Do la patria se siente vivir;
Y es su escudo invencible: el derecho;
Y es su lema: ser libre o morir.

XI

¡Libertad! que aún se yergue serena
La Victoria en su carro triunfal,
Y el clarín de la guerra aún resuena
Pregonando su gloria inmortal.

XII

¡Libertad! Que los ecos se agiten
Mientras llenos de noble ansiedad
Nuestros campos de gloria repiten
¡LIBERTAD! ¡LIBERTAD! ¡LIBERTAD!.

Letra: Emilio Prud'Homme | Música: José Reyes

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA
EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA
REPÚBLICA DOMINICANA

EDUCACIÓN

Libro abierto

SERIE 1